

Teoria Quântica de Campos Euclidiana

Carlos R. de Moraes Filho

12 de maio de 2026 (revisão ampliada)

Conteúdo

1	Introdução	14
I	Rotação de Wick e Espaço Euclidiano	16
1	Contexto Histórico e Motivação	17
1.1	Origens da Formulação Euclidiana	17
1.2	Por que a Formulação Euclidiana é Necessária	17
1.3	Analogia com Mecânica Quântica	18
2	A Continuação Analítica: Rotação de Wick	18
2.1	Definição Formal e Prescrição	18
2.2	Condições de Validade	19
2.3	Transformação de Operadores Importantes	20
2.4	Energia e o Hamiltoniano Euclidiano	21
2.5	Unitariedade vs. Positividade	21
2.6	Transformação da Métrica	21
2.7	Transformação dos Quadrivetores	22
2.8	Rotação no Plano Complexo de k^0	23
2.9	Demonstração Passo-a-Passo para a Integral de Loop	24
3	Simetria $SO(4)$ e Representações	25
3.1	O Grupo de Rotações Euclidianas	25
3.2	Decomposição $SO(4) \cong SU(2)_L \times SU(2)_R$	25
3.3	Relação com o Grupo de Lorentz	25
3.4	Coordenadas Hipersféricas em $\mathbb{R}^4$	26
4	Propagadores Euclidianos	26
4.1	Campo Escalar — Espaço de Momentos	26
4.2	Campo Escalar — Espaço de Posição	27

4.3	Representação de Schwinger (Tempo Próprio)	28
4.4	Campo de Dirac	29
4.5	Campo de Gauge	29
4.6	Representação Espectral (Källén-Lehmann) Euclidiana	30
5	Funções de Green Euclidianas e Representação Espectral	30
5.1	Funções de Schwinger	30
5.2	Função de Dois Pontos e Gap de Massa	31
5.3	Funções de Schwinger Conexas e 1PI	31
6	Regularização no Espaço Euclidiano	31
6.1	Regularização Dimensional	31
6.2	Parametrização de Feynman	32
6.3	Cutoff Euclidiano	32
6.4	Regularização Zeta	32
6.5	Heat Kernel e Expansão Assintótica	33
7	Axiomas de Osterwalder-Schrader	33
7.1	Positividade de Reflexão em Detalhe	34
7.2	Relação com os Axiomas de Wightman	35
7.3	Programa Construtivista	35
II	Ação Euclidiana e Integral de Caminho	36
1	Construção da Ação Euclidiana	37
1.1	Campo Escalar Real	37
1.2	Campo Escalar Complexo	38
1.3	Campo de Dirac	38
1.4	Campos de Gauge (Yang-Mills)	38
1.5	Ação Euclidiana Completa com Matéria	39
2	Integral Funcional Euclidiana	39

2.1	Definição e Convergência	39
2.2	Funções de Correlação (Funções de Schwinger)	40
2.3	Funcional Gerador	40
2.4	Integral Gaussiana Funcional	40
3	Método do Ponto de Sela e Aproximação Semiclássica	41
3.1	Princípio Geral	41
3.2	Determinante Funcional	41
3.3	Modos Zero e Parâmetros Coletivos	42
3.4	Modos Negativos e Instabilidades	42
4	Procedimento de Faddeev-Popov no Espaço Euclidiano	43
4.1	Fixação de Gauge	43
4.2	Ghosts Euclidianos	43
4.3	Simetria BRST Euclidiana	43
5	Positividade e Teoremas Rigorosos	44
5.1	Teorema de Vafa-Witten (1984)	44
5.2	Desigualdades de Correlação	44
5.3	Desigualdade de Nelson (Hipercontratividade)	45
6	Energia do Vácuo e Efeito Casimir Euclidiano	45
6.1	Energia de Vácuo como Determinante Funcional	45
6.2	Efeito Casimir Térmico	45
III	Mecânica Estatística e Teoria de Campos	46
1	A Correspondência Fundamental	47
1.1	Dicionário QFT Euclidiana $\leftrightarrow$ Mecânica Estatística	47
1.2	Exemplo: Modelo ϕ^4 e Modelo de Ising	47
1.3	Transições de Fase e Universalidade	47
1.4	Dimensão Crítica Superior	48

2	Grupo de Renormalização de Wilson	48
2.1	Ideia Fundamental	48
2.2	Equação do Fluxo	49
2.3	Operadores Relevantes, Marginais e Irrelevantes	49
2.4	Equação de Callan-Symanzik	49
3	Teoria de Campos Conforme no Ponto Crítico	50
3.1	Invariância Conforme	50
3.2	Restrições sobre Correladores	50
3.3	Expansão em Produto de Operadores (OPE)	50
3.4	Bootstrap Conforme	51
4	Modelo de Landau-Ginzburg	51
4.1	Funcional de Energia Livre	51
4.2	Aproximação de Campo Médio (Saddle Point)	51
4.3	Critério de Ginzburg	52
4.4	Flutuações Gaussianas e Correção de Ornstein-Zernike	52
5	Modelos $O(N)$ e Simetria Contínua	53
5.1	Definição	53
5.2	Teorema de Goldstone e Ondas de Spin	53
5.3	Limite $N \rightarrow \infty$ e Aproximação de Campo Médio	54
5.4	Teorema de Mermin-Wagner-Coleman	54
6	Teoria de Campos a Temperatura Finita	55
6.1	O Formalismo de Tempo Imaginário	55
6.2	Compactificação Temporal e Topologia Cilíndrica	55
6.3	Demonstração da Periodicidade Bosônica	56
6.4	Demonstração da Antiperiodicidade Fermiônica	57
6.5	Emergência da Mecânica Estatística pela Rotação de Wick	57
6.6	Potencial Químico no Formalismo Euclidiano	59

6.7	Relação KMS (Kubo-Martin-Schwinger)	60
IV	Formalismo de Matsubara	61
1	Frequências de Matsubara	61
1.1	Derivação via Condições de Contorno	61
1.2	Justificativa Física	62
2	Propagadores Térmicos	62
2.1	Propagador Bosônico	62
2.2	Propagador Fermiônico	62
2.3	Somas de Matsubara	63
3	Aplicações do Formalismo de Matsubara	63
3.1	Energia Livre do Campo Escalar	63
3.2	Correções Térmicas à Massa	64
3.3	Redução Dimensional	64
4	Continuação Analítica: Matsubara $\rightarrow$ Tempo Real	64
4.1	O Problema da Continuação Analítica	64
4.2	Método de Entropia Máxima (MEM)	65
4.3	Formalismo de Tempo Real (Schwinger-Keldysh)	65
5	Resomação de Hard Thermal Loops (HTL)	65
5.1	Motivação	65
5.2	Auto-energia HTL	66
5.3	Ação Efetiva HTL	66
V	Função de Partição em Teoria de Campos	67
1	Função de Partição como Integral Funcional	67
1.1	Definição Geral	67

1.2	Potencial Termodinâmico	67
1.3	Gás Ideal Bosônico	68
1.4	Gás Ideal Fermiônico	68
2	Expansão Perturbativa a Temperatura Finita	69
2.1	Regras de Feynman Térmicas	69
2.2	Pressão da QCD a Temperatura Finita	69
3	Transições de Fase	69
3.1	Potencial Efetivo Térmico	69
3.2	Transição de Fase Eletrofraca	70
4	Diagrama de Fases da QCD	70
4.1	Loop de Polyakov como Parâmetro de Ordem	70
4.2	Simetria de Centro $\mathbb{Z}_N$	71
4.3	Diagrama de Fases no Plano (T, μ_B)	71
4.4	Condensado Quiral e Restauração de Simetria	72
VI	Soluções Não-Perturbativas: Sólitons	73
1	Sólitons Topológicos em 1+1 Dimensões	73
1.1	O Kink	73
1.2	Carga Topológica e Estabilidade	74
1.3	Argumento de Bogomolny (BPS)	74
2	Vórtices em 2+1 Dimensões	75
2.1	Modelo de Higgs Abeliano	75
2.2	Fluxo Magnético Quantizado	75
3	Monopolos Magnéticos em 3+1 Dimensões	75
3.1	Monopolo de 't Hooft-Polyakov	75
3.2	Classificação Topológica	76

4	Skyrmions	76
4.1	O Modelo de Skyrme	76
4.2	Carga Bariônica Topológica	77
5	Defeitos Topológicos Cosmológicos	77
5.1	Cordas Cósmicas	77
5.2	Paredes de Domínio	77
5.3	Texturas e Monopólos Cosmológicos	77
6	Dualidade Sóliton-Partícula	77
6.1	Dualidade de Montonen-Olive	77
VII	Instantons	79
1	Instantons em Mecânica Quântica	79
1.1	Duplo Poço de Potencial	79
1.2	Tunelamento e Desdobramento de Energia	80
2	Instantons de Yang-Mills (BPST)	81
2.1	Configurações Auto-duais	81
2.2	Solução BPST Explícita	81
2.3	Parâmetros do Instanton (Espaço de Módulos)	82
3	Estrutura do Vácuo: o Vácuo θ	82
3.1	Vácuos Topológicos	82
3.2	O Estado θ -vácuo	83
3.3	O Problema CP Forte	83
4	Determinante Funcional e Flutuações	84
4.1	Aproximação Semiclássica	84
4.2	Problema da Escala e Gás de Instantons	84
5	Calorons: Instantons a Temperatura Finita	85

5.1	Definição	85
5.2	Caloron de Harrington-Shepard	85
5.3	Calorons de Kraan-van Baal-Lee-Lu (KvBLL)	85
5.4	Confinamento via Calorons	85
6	Instantons Fracionários e Resurgência	86
6.1	Instantons Fracionários	86
6.2	Resurgência e Teoria Transseriada	86
VIII	Aplicações Avançadas e Tópicos Modernos	87
1	Teoria de Campos na Rede (Lattice QFT)	87
1.1	Discretização Euclidiana	87
1.2	Ação de Wilson para Gauge	87
1.3	Férmions na Rede	88
1.4	Monte Carlo e Importância Sampling	88
2	Anomalias e o Teorema de Índice de Atiyah-Singer	89
2.1	Anomalia Quiral e Instantons	89
2.2	Interação de 't Hooft	89
3	Teoria de Campos Euclidiana e Supersimetria	90
3.1	Localização	90
3.2	Instantons e Dualidade	90
4	Condensação de Bose-Einstein via QFT Euclidiana	90
4.1	Formulação	90
4.2	Modo de Goldstone e Superfluidez	91
5	Grupo de Renormalização Funcional (FRG)	91
5.1	Equação de Wetterhaus (Exact RG)	91
5.2	Propriedades	91

5.3	Aplicações	91
6	Formalismo Worldline Euclidiano	92
6.1	Representação de Tempo Próprio	92
6.2	Produção de Pares de Schwinger	92
7	Machine Learning e QFT Euclidiana na Rede	93
7.1	Redes Neurais para Geração de Configurações	93
7.2	Problemas do Sinal e Deformação de Contorno	93
IX	Dcaimento do Falso Vácuo e Bounces Euclidianos	94
1	O Bounce de Coleman	94
1.1	Configuração do Problema	94
1.2	Equação do Bounce	95
1.3	Teorema de Coleman	95
1.4	Aproximação de Parede Fina (Thin-Wall)	95
1.5	Interpretação Física	96
1.6	Prefator e Modo Negativo	96
2	Bounce Gravitacional (Coleman-De Luccia)	97
2.1	Ação com Gravidade	97
2.2	Aplicações Cosmológicas	97
X	Gravitação Euclidiana e Termodinâmica de Buracos Ne- gros	98
1	Ação Gravitacional Euclidiana	98
1.1	Ação de Einstein-Hilbert Euclidiana	98
2	Temperatura de Hawking pela Periodicidade Euclidiana	99
2.1	Método de Gibbons-Hawking	99

2.2	Generalização	99
3	Efeito Unruh: Temperatura da Aceleração	100
3.1	Espaço de Rindler e o Horizonte de Aceleração	100
3.2	Rotação de Wick no Espaço de Rindler	101
3.3	Interpretação Física do Efeito Unruh	101
3.4	Valores Numéricos e Observabilidade	102
3.5	Unificação: Unruh, Hawking e Gibbons-Hawking	103
4	Efeito Gibbons-Hawking: Temperatura do Espaço de Sitter	103
4.1	Espaço de Sitter Euclidiano	103
4.2	Implicações Cosmológicas	104
5	Outros Efeitos Físicos da Rotação de Wick	104
5.1	Efeito Schwinger como Instanton Euclidiano	104
5.2	Efeito Casimir Dinâmico e Espelhos Acelerados	105
5.3	Termalização Topológica e Efeito de Casimir Topológico	105
5.4	Radiação de Hawking pela Anomalia de Traço	105
5.5	Nucleação de Pares em Campos Gravitacionais	106
6	Entropia de Bekenstein-Hawking	106
6.1	Derivação via Ação On-Shell	106
6.2	Contribuição Topológica	107
7	Transição de Fase de Hawking-Page	107
7.1	Schwarzschild-AdS Euclidiano	107
7.2	Transição de Primeira Ordem	107
8	Instantons Gravitacionais	108
XI	Anomalias e o Método de Fujikawa	109
1	Derivação da Anomalia Quiral pelo Método de Fujikawa	109

1.1	A Medida Funcional Fermiônica	109
1.2	Transformação Quiral	110
1.3	Regularização e Resultado	110
2	Teorema do Índice de Atiyah-Singer	111
2.1	Enunciado	111
2.2	Relação com a Anomalia	111
2.3	Demonstração via Heat Kernel	111
3	Anomalia Conforme (Trace Anomaly)	112
3.1	Definição	112
3.2	c -theorem de Zamolodchikov	112
4	Anomalia Gravitacional	112
4.1	Anomalia Mista Gauge-Gravidade	112
XII	Quantização Estocástica (Parisi-Wu)	113
1	Formulação Básica	113
1.1	Equação de Langevin	113
1.2	Equilíbrio e Equivalência	113
1.3	Equação de Fokker-Planck	114
2	Vantagens e Aplicações	114
2.1	Teorias de Gauge sem Fixação de Gauge	114
2.2	Quantização Estocástica Complexa	114
2.3	Relação com Supersimetria	114
XIII	Teoria de Campos Topológica Euclidiana	116
1	Teoria de Chern-Simons	116
1.1	Ação de Chern-Simons em 3D	116

1.2	Invariantes de Nós (Witten, 1989)	117
2	Teoria de Yang-Mills Topologicamente Twisted (Donaldson-Witten)	117
2.1	Twist Topológico	117
2.2	Invariantes de Donaldson	117
3	Termo Topológico θ e Número de Pontryagin	118
3.1	O Termo θ como Invariante Topológico	118
3.2	Susceptibilidade Topológica	118
4	Síntese e Perspectivas	118

1 Introdução

A Teoria Quântica de Campos Euclidiana constitui uma das reformulações mais poderosas e elegantes da física teórica moderna. A ideia central consiste em realizar uma continuação analítica do tempo real para o tempo imaginário — a chamada **rotação de Wick** — transformando a métrica de Minkowski em uma métrica euclidiana. Essa passagem não é meramente um artifício matemático: ela revela conexões profundas entre teoria quântica de campos, mecânica estatística, topologia e matemática pura.

Este documento apresenta uma análise detalhada da formulação euclidiana da teoria quântica de campos, explorando suas fundações, aplicações e conexões interdisciplinares. O conteúdo é organizado nas seguintes partes:

- **Parte I – Rotação de Wick e Espaço Euclidiano:** Examina a continuação analítica $t \rightarrow -i\tau$, a passagem da métrica de Minkowski para a métrica euclidiana, condições de analiticidade e a reformulação dos propagadores.
- **Parte II – Ação Euclidiana e Integral de Caminho:** Desenvolve a formulação da integral de caminho no espaço euclidiano, a correspondência com a função de partição da mecânica estatística e o papel da ação euclidiana.
- **Parte III – Mecânica Estatística e Teoria de Campos:** Explora a conexão profunda entre QFT euclidiana e mecânica estatística, o formalismo de tempo imaginário de Matsubara e transições de fase.
- **Parte IV – Formalismo de Matsubara:** Detalha as frequências de Matsubara, condições de contorno periódicas e antiperiódicas, e aplicações a sistemas em equilíbrio térmico.
- **Parte V – Função de Partição em Teoria de Campos:** A função de partição como integral funcional, energia livre, funções de correlação térmicas e expansão perturbativa.
- **Parte VI – Soluções Não-Perturbativas: Sólitons:** Sólitons topológicos, kinks, vórtices, monopolos magnéticos e estabilidade topológica.
- **Parte VII – Instantons:** Soluções de ponto de sela da ação euclidiana, tunelamento quântico, instantons em Yang-Mills, o vácuo θ e o problema CP forte.
- **Parte VIII – Aplicações Avançadas e Tópicos Modernos:** Teoria de campos na rede (Lattice QFT), desconfinamento, condensação de Bose-Einstein, grupo de renormalização funcional e formalismo worldline.

- **Parte IX – Decaimento do Falso Vácuo e Bounces Euclidianos:** Bounce de Coleman, aproximação thin-wall, bounce gravitacional de Coleman-De Luccia e estabilidade do vácuo eletrofraco.
- **Parte X – Gravitação Euclidiana e Termodinâmica de Buracos Negros:** Efeito Unruh (temperatura da aceleração via espaço de Rindler euclidiano), temperatura de Hawking pela periodicidade euclidiana, efeito Gibbons-Hawking (temperatura de de Sitter), efeito Schwinger como instanton worldline, entropia de Bekenstein-Hawking, transição de Hawking-Page e instantons gravitacionais.
- **Parte XI – Anomalias e o Método de Fujikawa:** Derivação euclidiana da anomalia quiral, teorema do índice de Atiyah-Singer, anomalia conforme e c -theorem.
- **Parte XII – Quantização Estocástica (Parisi-Wu):** Equação de Langevin em tempo fictício, equivalência com QFT euclidiana, quantização de gauge sem fixação e supersimetria oculta.
- **Parte XIII – Teoria de Campos Topológica Euclidiana:** Teoria de Chern-Simons, invariantes de nós, invariantes de Donaldson e termo θ topológico.

Parte I

Rotação de Wick e Espaço Euclidiano

A rotação de Wick é o procedimento fundamental que conecta a teoria quântica de campos no espaço-tempo de Minkowski à formulação euclidiana. Mediante a substituição $t \rightarrow -i\tau$, o oscilador e^{iS} da integral de caminho transforma-se no fator de supressão e^{-S_E} , tornando a integral funcional matematicamente bem definida e revelando a estrutura probabilística subjacente.

Os tópicos abordados incluem:

- **Contexto Histórico e Motivação:** Origens da rotação de Wick, contribuições de Schwinger, Symanzik e a escola construtivista.
- **A Continuação Analítica:** A prescrição $t \rightarrow -i\tau$ e suas consequências para a métrica, propagadores e funções de Green.
- **Métrica Euclidiana e Simetria $SO(4)$:** A passagem de $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(+1, -1, -1, -1)$ para $\delta_{\mu\nu} = \text{diag}(+1, +1, +1, +1)$, representações do grupo $SO(4)$ e suas implicações geométricas.
- **Condições de Analiticidade:** Requisitos de Osterwalder-Schrader para a reconstrução da teoria minkowskiana a partir dos dados euclidianos.
- **Propagadores Euclidianos:** Reformulação dos propagadores de Feynman no espaço euclidiano, cálculos explícitos no espaço de posição e regularização.
- **Funções de Green Euclidianas:** Relação com funções de Schwinger, continuação analítica de n -pontos e espectralidade.
- **Regularização no Espaço Euclidiano:** Regularização dimensional, cutoff euclidiano e vantagens computacionais.

1 Contexto Histórico e Motivação

1.1 Origens da Formulação Euclidiana

A ideia de trabalhar com tempo imaginário tem raízes profundas na física teórica:

- **Gian Carlo Wick (1954):** Propôs formalmente a substituição $t \rightarrow -i\tau$ como técnica para simplificar integrais em teoria de perturbação. A rotação no plano complexo de k^0 permite avaliar integrais de loop sem lidar com as prescrições $i\epsilon$.
- **Julian Schwinger (1958):** Desenvolveu o formalismo de funções de Green euclidianas e reconheceu que a teoria no tempo imaginário possui propriedades de positividade ausentes na formulação minkowskiana.
- **Kurt Symanzik (1966):** Pioneiro na utilização sistemática da formulação euclidiana para estudar a estrutura do espaço de Hilbert e a convergência da série perturbativa.
- **Nelson (1973), Osterwalder-Schrader (1973-1975):** Estabeleceram os axiomas que garantem a equivalência rigorosa entre as formulações euclidiana e minkowskiana.
- **Kenneth Wilson (1974):** Demonstrou que a formulação euclidiana na rede fornece uma definição não-perturbativa de teorias de gauge, abrindo caminho para simulações numéricas.

1.2 Por que a Formulação Euclidiana é Necessária

A formulação minkowskiana apresenta obstáculos fundamentais:

1. Problema de convergência: A integral funcional $\int \mathcal{D}\phi e^{iS}$ com S real não converge absolutamente — é uma integral oscilatória infinito-dimensional sem medida bem definida no sentido de Lebesgue.

2. Prescrição $i\epsilon$: A prescrição de Feynman $m^2 \rightarrow m^2 - i\epsilon$ é necessária para definir propagadores, mas sua implementação em contextos não-perturbativos é ambígua.

3. Simulações numéricas: Monte Carlo requer um peso de probabilidade real e positivo — impossível com e^{iS} (o “problema do sinal”).

4. Existência matemática: Teoremas de existência para QFT interagente (como ϕ^4 em $d < 4$) foram demonstrados exclusivamente na formulação euclidiana (Glimm-Jaffe, 1968-1987).

A formulação euclidiana resolve todos estes problemas: e^{-S_E} é real, positivo, e exponencialmente suprimido para configurações de alta ação, definindo uma medida de probabilidade genuína.

1.3 Analogia com Mecânica Quântica

A motivação mais elementar vem da mecânica quântica. O propagador de uma partícula livre:

$$K(x_f, t; x_i, 0) = \langle x_f | e^{-iHt} | x_i \rangle = \int_{x(0)=x_i}^{x(t)=x_f} \mathcal{D}x(\tau') e^{iS[x]},$$

com $S = \int_0^t dt' \frac{m\dot{x}^2}{2}$, é uma integral oscilatória mal definida. Sob $t \rightarrow -i\tau$:

$$K_E(x_f, \tau; x_i, 0) = \langle x_f | e^{-H\tau} | x_i \rangle = \int \mathcal{D}x e^{-S_E[x]},$$

com $S_E = \int_0^\tau d\tau' \frac{m\dot{x}^2}{2} \geq 0$. Esta é a **fórmula de Feynman-Kac** — uma integral de caminho com medida de Wiener rigorosamente construída.

A conexão com difusão é imediata: K_E satisfaz a equação de difusão (calor):

$$\frac{\partial K_E}{\partial \tau} = \frac{1}{2m} \nabla^2 K_E,$$

enquanto K satisfaz a equação de Schrödinger (onda). O tempo euclidiano transforma propagação quântica (ondulatória) em difusão (probabilística).

2 A Continuação Analítica: Rotação de Wick

2.1 Definição Formal e Prescrição

Na formulação de Minkowski, a amplitude de transição entre estados é dada pela integral de caminho:

$$\langle \phi_f | e^{-iHT} | \phi_i \rangle = \int \mathcal{D}\phi e^{iS[\phi]},$$

onde $S[\phi] = \int d^4x \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi)$ é a ação no espaço-tempo de Minkowski. O fator e^{iS} é altamente oscilatório, tornando a convergência da integral funcional problemática.

A **rotação de Wick** consiste na substituição analítica:

$$\boxed{t \rightarrow -i\tau, \quad \tau \in \mathbb{R}}$$

que transforma o tempo real t em tempo euclidiano τ . Geometricamente, esta é uma

rotação de 90 no sentido horário no plano complexo do tempo: $t = |t|e^{i\alpha}$ com $\alpha : 0 \rightarrow -\pi/2$.

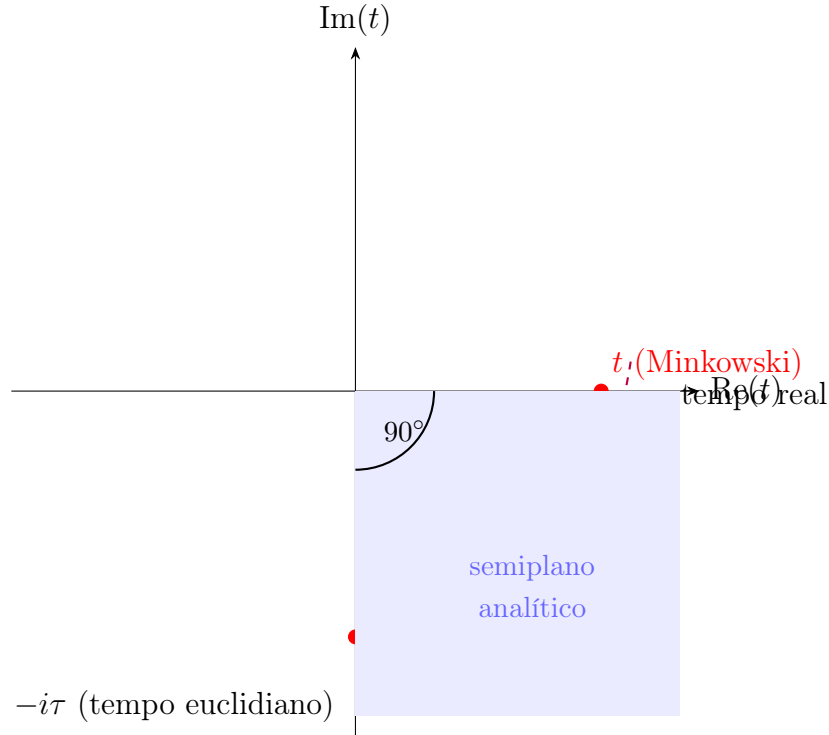


Figura 1: Rotação de Wick no plano complexo do tempo. O tempo real t (eixo horizontal) é continuado analiticamente para $-i\tau$ (eixo imaginário negativo). A rotação de 90 no sentido horário transforma a métrica de Minkowski em euclidiana. A região sombreada indica o semiplano inferior onde as funções de Green são analíticas.

Sob esta substituição:

- A coordenada temporal torna-se: $x^0 = t \rightarrow x_E^4 = \tau = it$.
- O elemento de linha transforma-se: $ds^2 = dt^2 - d\vec{x}^2 \rightarrow ds_E^2 = d\tau^2 + d\vec{x}^2$.
- A ação minkowskiana iS_M transforma-se em $-S_E$, onde $S_E \geq 0$.
- O operador de evolução: $e^{-iHt} \rightarrow e^{-H\tau}$ (decaimento exponencial).
- O operador d'Alembertiano: $\square = \partial_t^2 - \nabla^2 \rightarrow -(\partial_\tau^2 + \nabla^2) = -\Delta_4$ (Laplaciano 4D).

2.2 Condições de Validade

A rotação de Wick é válida quando:

1. **Analiticidade:** As funções de Green $G(x_1, \dots, x_n)$ são analíticas em t no semiplano inferior $\text{Im}(t) \leq 0$ (para funções ordenadas no tempo).

2. **Decaimento:** As funções de Green decaem suficientemente rápido no semiplano inferior para que o contorno possa ser deformado.
3. **Espectralidade:** O espectro de energia é limitado inferiormente ($H \geq 0$), garantindo que $e^{-H\tau}$ decaia para $\tau > 0$.

Estas condições são satisfeitas automaticamente em qualquer teoria quântica de campos com hamiltoniano positivo (axioma de estabilidade do vácuo).

Contra-exemplo: Em teorias com potencial não-limitado inferiormente ou em presença de instabilidades (taquions), a rotação de Wick pode falhar. Por exemplo, para o potencial $V(\phi) = -\lambda\phi^4$ com $\lambda > 0$, a ação euclidiana é ilimitada inferiormente e a integral funcional diverge.

2.3 Transformação de Operadores Importantes

A rotação de Wick induz transformações em todas as quantidades da teoria. Apresentamos um catálogo completo:

Derivadas:

$$\partial_t \rightarrow i\partial_\tau, \quad \partial^t = \partial_t \rightarrow i\partial_\tau, \quad (1)$$

$$\partial_\mu \partial^\mu = \partial_t^2 - \nabla^2 \rightarrow -(\partial_\tau^2 + \nabla^2) = -\partial_\mu^E \partial_\mu^E. \quad (2)$$

Equação de Klein-Gordon:

$$(\square + m^2)\phi = (\partial_t^2 - \nabla^2 + m^2)\phi = 0 \quad \rightarrow \quad (-\partial_\tau^2 - \nabla^2 + m^2)\phi = 0,$$

ou seja: $(-\Delta_4 + m^2)\phi = 0$ — equação de **difusão estacionária** (Helmholtz em 4D).

Equação de Dirac:

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi = 0 \quad \rightarrow \quad (\gamma_E^\mu \partial_\mu^E + m)\psi = 0.$$

Equações de Yang-Mills:

$$D_\mu F^{\mu\nu} = J^\nu \quad \rightarrow \quad D_\mu^E F_{\mu\nu}^E = J_\nu^E.$$

No espaço euclidiano, as equações de Yang-Mills sem fonte ($J = 0$) admitem soluções de ação finita (instantons) que não existem em Minkowski — ali, o teorema de Derrick proíbe soluções estáticas localizadas em $d > 2$.

2.4 Energia e o Hamiltoniano Euclidiano

Sob rotação de Wick, o hamiltoniano minkowskiano H torna-se o gerador de “translações” no tempo euclidiano:

$$e^{-iHt}\big|_{t=-i\tau} = e^{-H\tau}.$$

O operador $e^{-H\tau}$ é um semigrupo de contração (para $H \geq 0$): suprime estados de alta energia exponencialmente. No limite $\tau \rightarrow \infty$, projeta sobre o estado de menor energia (vácuo):

$$e^{-H\tau}|\psi\rangle \xrightarrow{\tau \rightarrow \infty} |\langle 0|\psi\rangle|^2 \cdot e^{-E_0\tau}|0\rangle.$$

Esta propriedade é explorada em lattice QCD para extrair o estado fundamental: qualquer estado inicial com overlap não-nulo com o vácuo converge para ele sob evolução euclidiana longa.

2.5 Unitariedade vs. Positividade

Uma distinção conceitual crucial:

- **Minkowski:** A propriedade fundamental é **unitariedade** ($S^\dagger S = 1$). Amplitudes oscilatórias, probabilidades conservadas.
- **Euclidiano:** A propriedade fundamental é **positividade** ($e^{-S_E} \geq 0$). Medida de probabilidade, decaimento exponencial.

O teorema de Osterwalder-Schrader garante que positividade de reflexão no euclidiano $\Leftrightarrow$ unitariedade em Minkowski. São manifestações complementares da mesma consistência física.

2.6 Transformação da Métrica

No espaço-tempo de Minkowski, a métrica é (convenção “mostly minus”):

$$\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(+1, -1, -1, -1), \quad ds^2 = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2.$$

Após a rotação de Wick $t = -i\tau$, temos $dt = -id\tau$ e portanto $dt^2 = -d\tau^2$:

$$ds^2 = -d\tau^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = -(d\tau^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2).$$

Definindo a métrica euclidiana com sinal positivo:

$$\delta_{\mu\nu} = \text{diag}(+1, +1, +1, +1), \quad ds_E^2 = d\tau^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$$

O espaço-tempo torna-se um espaço euclidiano $\mathbb{R}^4$ com simetria de rotação $SO(4)$, em contraste com a simetria de Lorentz $SO(1, 3)$ do espaço de Minkowski.

Observação sobre convenções: Na literatura, encontram-se duas convenções para a rotação:

- $x^4 = it$ (convenção “ x^4 ”): usada por Zinn-Justin, Ramond.
- $x_E^0 = \tau = it$ (convenção “ x_E^0 ”): usada por Peskin-Schroeder.

Adotamos a primeira ao longo deste texto. Ambas são equivalentes, mas é crucial manter consistência nos sinais.

2.7 Transformação dos Quadrivetores

Os quadrivetores e seus produtos escalares transformam-se como:

$$x_M^\mu = (t, \vec{x}) \rightarrow x_E^\mu = (x^1, x^2, x^3, x^4) = (\vec{x}, \tau), \quad (3)$$

$$k_M^\mu = (k^0, \vec{k}) \rightarrow k_E^\mu = (\vec{k}, k_4), \quad \text{com } k^0 = ik_4, \quad (4)$$

$$k \cdot x|_M = k^0 t - \vec{k} \cdot \vec{x} \rightarrow -k_\mu^E x_E^\mu = -(k_4 \tau + \vec{k} \cdot \vec{x}). \quad (5)$$

O produto escalar euclidiano é definido como:

$$k_E^2 = k_4^2 + \vec{k}^2 \geq 0,$$

sempre positivo-definido, eliminando as subtilezas de prescrição $i\epsilon$ dos propagadores minkowskianos.

Tabela de correspondências:

Quantidade	Minkowski	Euclidiano
Coordenadas	(t, x, y, z)	(x, y, z, τ)
Métrica	$\eta_{\mu\nu} = (+, -, -, -)$	$\delta_{\mu\nu} = (+, +, +, +)$
Produto escalar	$k^2 = (k^0)^2 - \vec{k} ^2$	$k_E^2 = k_4^2 + \vec{k} ^2$
Elemento de volume	$d^4x = dt d^3x$	$d^4x_E = d\tau d^3x$
Operador cinético	$\square = \partial_t^2 - \nabla^2$	$-\Delta_4 = -(\partial_\tau^2 + \nabla^2)$
Relação energia-momento	$p^2 = E^2 - \vec{p} ^2 = m^2$	$p_E^2 = p_4^2 + \vec{p} ^2$

Tabela 1: Correspondência entre quantidades em Minkowski e no espaço euclidiano.

2.8 Rotação no Plano Complexo de k^0

A rotação de Wick no espaço de momentos corresponde à rotação:

$$k^0 \rightarrow ik_4,$$

de modo que:

$$k_M^2 = (k^0)^2 - \vec{k}^2 \rightarrow -(k_4^2 + \vec{k}^2) = -k_E^2.$$

Esta rotação é permitida desde que o integrando não possua polos no quadrante por onde o contorno é deformado. No propagador de Feynman:

$$\frac{i}{k^2 - m^2 + i\epsilon} = \frac{i}{(k^0)^2 - \vec{k}^2 - m^2 + i\epsilon},$$

os polos estão em $k^0 = \pm(\omega_k - i\epsilon)$ com $\omega_k = \sqrt{\vec{k}^2 + m^2}$, localizados no segundo e quarto quadrantes. A rotação de k^0 ao longo do eixo imaginário (primeiro e terceiro quadrantes) é portanto permitida sem cruzar polos.

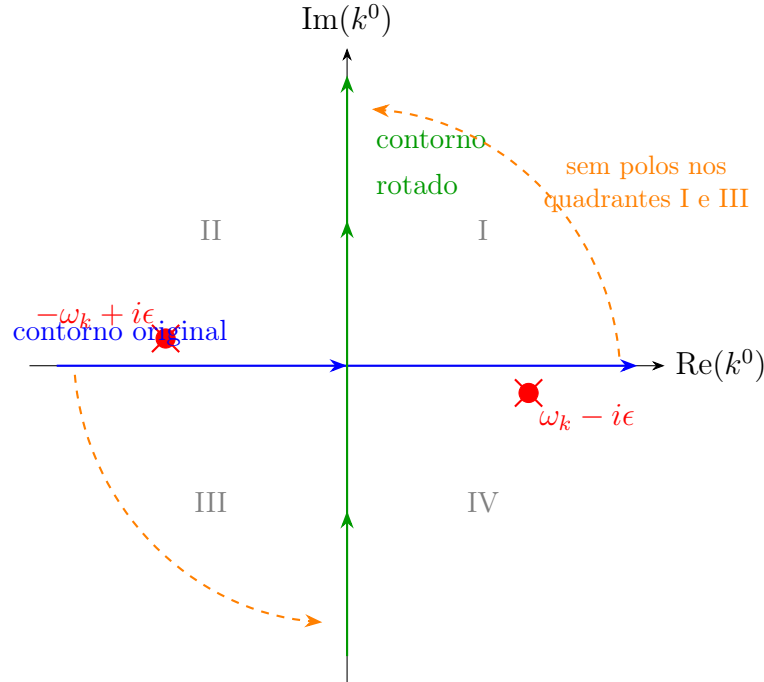


Figura 2: Estrutura de polos do propagador de Feynman no plano complexo k^0 . Os polos estão localizados nos quadrantes II e IV (cruzes vermelhas). O contorno de integração original (azul, ao longo do eixo real) pode ser deformado para o eixo imaginário (verde), passando pelos quadrantes I e III sem cruzar singularidades. Esta é a rotação de Wick no espaço de momentos: $k^0 \rightarrow ik_4$.

Demonstração detalhada: Considere a integral de loop de um ponto:

$$I = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - m^2 + i\epsilon)^n}.$$

Os polos no plano k^0 estão em:

$$k^0 = \pm \sqrt{\vec{k}^2 + m^2 - i\epsilon} = \pm(\omega_k - i\epsilon'),$$

ou seja, o polo positivo está deslocado infinitesimalmente abaixo do eixo real, e o negativo acima. O contorno de integração em k^0 pode ser deformado de $(-\infty, +\infty)$ ao longo do eixo real para $(-i\infty, +i\infty)$ ao longo do eixo imaginário, passando pelos primeiro e terceiro quadrantes sem encontrar polos:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dk^0 f(k^0) = \int_{-i\infty}^{+i\infty} dk^0 f(k^0) = i \int_{-\infty}^{+\infty} dk_4 f(ik_4).$$

Portanto:

$$I = i \int \frac{d^3 k dk_4}{(2\pi)^4} \frac{1}{(-(k_4^2 + \vec{k}^2) - m^2)^n} = i \int \frac{d^4 k_E}{(2\pi)^4} \frac{(-1)^n}{(k_E^2 + m^2)^n}.$$

2.9 Demonstração Passo-a-Passo para a Integral de Loop

Aplicando ao cálculo de auto-energia escalar em um loop ($n = 1$ com dois propagadores), a integral divergente:

$$I_M = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{i}{k^2 - m^2 + i\epsilon}$$

torna-se, após rotação de Wick:

$$I_E = - \int \frac{d^4 k_E}{(2\pi)^4} \frac{1}{k_E^2 + m^2}.$$

A vantagem é manifesta: em coordenadas hipersféricas euclidianas ($k_E^2 = k_4^2 + |\vec{k}|^2$):

$$I_E = - \frac{1}{(2\pi)^4} \int_0^\infty dk_E k_E^3 \cdot \frac{2\pi^2}{k_E^2 + m^2} = - \frac{1}{8\pi^2} \int_0^\infty \frac{k_E^3 dk_E}{k_E^2 + m^2},$$

onde $2\pi^2$ é a área da 3-esfera S^3 (usamos $\Omega_d = 2\pi^{d/2}/\Gamma(d/2)$, com $\Omega_4 = 2\pi^2$). A integral é divergente quadraticamente, mas agora está em forma adequada para regularização dimensional.

3 Simetria $SO(4)$ e Representações

3.1 O Grupo de Rotações Euclidianas

No espaço euclidiano $\mathbb{R}^4$, o grupo de simetria é $SO(4)$ — o grupo das rotações em quatro dimensões. Sua álgebra de Lie possui $\binom{4}{2} = 6$ geradores $M_{\mu\nu}$ ($\mu < \nu$) satisfazendo:

$$[M_{\mu\nu}, M_{\rho\sigma}] = \delta_{\mu\rho}M_{\nu\sigma} - \delta_{\mu\sigma}M_{\nu\rho} - \delta_{\nu\rho}M_{\mu\sigma} + \delta_{\nu\sigma}M_{\mu\rho}.$$

3.2 Decomposição $SO(4) \cong SU(2)_L \times SU(2)_R$

Uma propriedade crucial de $SO(4)$ é seu isomorfismo local:

$$SO(4) \cong \frac{SU(2)_L \times SU(2)_R}{\mathbb{Z}_2}.$$

Os geradores auto-duais e anti-auto-duais:

$$M_{\mu\nu}^{\pm} = \frac{1}{2}(M_{\mu\nu} \pm \tilde{M}_{\mu\nu}), \quad \tilde{M}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}M_{\rho\sigma},$$

satisfazem independentemente a álgebra de $SU(2)$:

$$[M_i^+, M_j^+] = \epsilon_{ijk}M_k^+, \quad [M_i^-, M_j^-] = \epsilon_{ijk}M_k^-, \quad [M_i^+, M_j^-] = 0.$$

Esta decomposição é fundamental para:

- A classificação de instantons (auto-duais vs. anti-auto-duais).
- A estrutura dos símbolos de 't Hooft $\eta_{\mu\nu}^a$ e $\bar{\eta}_{\mu\nu}^a$.
- A formulação de férmions quirais no espaço euclidiano.

3.3 Relação com o Grupo de Lorentz

O grupo de Lorentz $SO(1, 3)$ possui a complexificação:

$$\mathfrak{so}(1, 3)_{\mathbb{C}} \cong \mathfrak{so}(4)_{\mathbb{C}} \cong \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \oplus \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}).$$

As representações (j_L, j_R) sob $SU(2)_L \times SU(2)_R$ correspondem:

- $(0, 0)$: escalar.

- $(\frac{1}{2}, 0)$: spinor de Weyl esquerdo.
- $(0, \frac{1}{2})$: spinor de Weyl direito.
- $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$: vetor (4-vetor euclidiano).
- $(1, 0) \oplus (0, 1)$: tensor antissimétrico de rank 2 (decomposto em partes auto-dual e anti-auto-dual).

A rotação de Wick preserva as representações, mas muda as condições de realidade: representações unitárias de $SO(1, 3)$ (espaço de Minkowski) correspondem a representações unitárias de $SO(4)$ (espaço euclidiano).

3.4 Coordenadas Hiperesféricas em $\mathbb{R}^4$

Para cálculos de integrais euclidianas, é conveniente usar coordenadas hiperesféricas:

$$k_E = (k_1, k_2, k_3, k_4) = k_E (\sin \chi \sin \theta \cos \phi, \sin \chi \sin \theta \sin \phi, \sin \chi \cos \theta, \cos \chi),$$

com $k_E = |k_E| \geq 0$, $\chi \in [0, \pi]$, $\theta \in [0, \pi]$, $\phi \in [0, 2\pi)$. O elemento de volume é:

$$d^4 k_E = k_E^3 dk_E \sin^2 \chi d\chi \sin \theta d\theta d\phi.$$

Integrando sobre os ângulos (para integrandos esfericamente simétricos):

$$\int d^4 k_E f(k_E^2) = 2\pi^2 \int_0^\infty dk_E k_E^3 f(k_E^2),$$

onde $2\pi^2 = \text{Vol}(S^3) = \frac{2\pi^{4/2}}{\Gamma(2)}$ é a área da 3-esfera unitária.

Em d dimensões euclidianas gerais:

$$\int d^d k_E f(k_E^2) = \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)} \int_0^\infty dk_E k_E^{d-1} f(k_E^2).$$

4 Propagadores Euclidianos

4.1 Campo Escalar — Espaço de Momentos

O propagador de Feynman no espaço de Minkowski para um campo escalar livre de massa m é:

$$\Delta_F(x - y) = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{i}{k^2 - m^2 + i\epsilon} e^{-ik \cdot (x - y)}.$$

Após a rotação de Wick, o propagador euclidiano torna-se:

$$\Delta_E(x - y) = \int \frac{d^4 k_E}{(2\pi)^4} \frac{1}{k_E^2 + m^2} e^{ik_E \cdot (x-y)_E}$$

Note as diferenças cruciais:

- O fator i no numerador desaparece.
- O sinal no denominador muda: $k^2 - m^2 \rightarrow k_E^2 + m^2$, sempre positivo.
- A prescrição $i\epsilon$ torna-se desnecessária.
- O propagador euclidiano é **real e positivo** no espaço de momentos.
- $\Delta_E(k) = 1/(k_E^2 + m^2)$ é a função de Green do operador $(-\Delta_4 + m^2)$.

4.2 Campo Escalar — Espaço de Posição

O propagador euclidiano no espaço de posição é obtido pela transformada de Fourier:

$$\Delta_E(x) = \int \frac{d^4 k_E}{(2\pi)^4} \frac{e^{ik_E \cdot x}}{k_E^2 + m^2}.$$

Utilizando coordenadas hiperesféricas e a representação integral de funções de Bessel:

$$\Delta_E(x) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^\infty \frac{k^3 dk}{k^2 + m^2} \cdot \frac{J_1(k|x|)}{k|x|},$$

que resulta em:

$$\Delta_E(x) = \frac{m}{4\pi^2|x|} K_1(m|x|)$$

onde K_1 é a função de Bessel modificada de segunda espécie e $|x| = \sqrt{\tau^2 + \vec{x}^2}$ é a distância euclidiana.

Comportamentos assintóticos:

- **Curtas distâncias** ($m|x| \ll 1$): $\Delta_E(x) \approx \frac{1}{4\pi^2|x|^2}$ (comportamento de campo sem massa).
- **Longas distâncias** ($m|x| \gg 1$): $\Delta_E(x) \approx \frac{m^{1/2}}{(2\pi)^{3/2}|x|^{3/2}} e^{-m|x|}$ (decaimento exponencial com comprimento de correlação $\xi = 1/m$).

O decaimento exponencial em $e^{-m|x|}$ é a manifestação euclidiana do **gap de massa**: a correlação entre campos separados por distância $|x|$ é suprimida exponencialmente para $|x| \gg 1/m$.

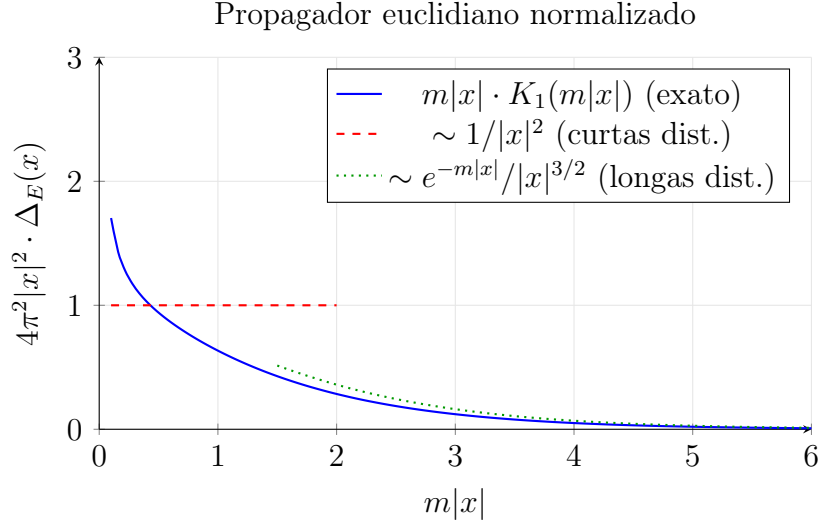


Figura 3: Comportamento do propagador euclidiano $\Delta_E(x)$ em função da distância $m|x|$. Para curtas distâncias ($m|x| \ll 1$), domina o comportamento de potência $\sim 1/|x|^2$ (campo sem massa). Para longas distâncias ($m|x| \gg 1$), o decaimento exponencial $e^{-m|x|}$ impõe o comprimento de correlação finito $\xi = 1/m$.

Caso sem massa ($m = 0$):

$$\Delta_E(x)|_{m=0} = \frac{1}{4\pi^2|x|^2} = \frac{\Gamma(d/2 - 1)}{4\pi^{d/2}} \frac{1}{|x|^{d-2}} \Big|_{d=4},$$

que é a função de Green do Laplaciano $-\Delta_4$ em $\mathbb{R}^4$, análoga ao potencial coulombiano $1/(4\pi r)$ em $\mathbb{R}^3$.

4.3 Representação de Schwinger (Tempo Próprio)

Uma representação extremamente útil do propagador euclidiano é a de **tempo próprio de Schwinger**:

$$\frac{1}{k_E^2 + m^2} = \int_0^\infty ds e^{-s(k_E^2 + m^2)},$$

onde s é o parâmetro de tempo próprio (Schwinger proper time). No espaço de posição:

$$\Delta_E(x) = \int_0^\infty \frac{ds}{(4\pi s)^{d/2}} e^{-m^2 s - |x|^2/(4s)}.$$

Esta representação:

- Interpreta o propagador como a amplitude de uma partícula difundindo por “tempo” s .
- É a base da regularização de tempo próprio (proper-time regularization): $\int_0^\infty \rightarrow$

$$\int_{1/\Lambda^2}^{\infty}.$$

- Conecta-se naturalmente à formulação worldline (Strassler, Schubert).
- Generaliza facilmente para campos em backgrounds curvos ou com campos de gauge.

4.4 Campo de Dirac

Para férmions, a rotação de Wick requer cuidado adicional com as matrizes gama. Defina-se:

$$\gamma_E^4 = \gamma_M^0, \quad \gamma_E^j = -i\gamma_M^j \quad (j = 1, 2, 3),$$

satisfazendo a álgebra euclidiana:

$$\{\gamma_E^\mu, \gamma_E^\nu\} = 2\delta^{\mu\nu}.$$

Todas as matrizes gama euclidianas são **hermitianas**: $(\gamma_E^\mu)^\dagger = \gamma_E^\mu$, em contraste com Minkowski onde apenas γ^0 é hermitiana.

O propagador fermiônico euclidiano no espaço de momentos é:

$$S_E(k) = \frac{1}{\gamma_E^\mu k_\mu^E + m} = \frac{-\gamma_E^\mu k_\mu^E + m}{k_E^2 + m^2}.$$

No espaço de posição:

$$S_E(x) = (-\gamma_E^\mu \partial_\mu + m)\Delta_E(x) = \frac{m^2}{4\pi^2|x|} \left(\frac{\gamma_E^\mu x_\mu}{|x|} \cdot \frac{K_2(m|x|)}{m|x|} + K_1(m|x|) \right).$$

Propriedade fundamental: O operador de Dirac euclidiano $D_E = \gamma_E^\mu \partial_\mu$ é **anti-hermitiano**:

$$D_E^\dagger = -D_E,$$

o que implica que $D_E + m$ tem espectro real e o determinante fermiônico $\det(D_E + m)$ é real.

4.5 Campo de Gauge

Para um campo de gauge no gauge covariante geral (R_ξ gauge), o propagador euclidiano é:

$$D_{\mu\nu}^{ab}(k) = \delta^{ab} \left[\frac{\delta_{\mu\nu} - k_\mu k_\nu / k_E^2}{k_E^2 + m^2} + \xi \frac{k_\mu k_\nu / k_E^2}{k_E^2 + \xi m^2} \right].$$

Casos especiais:

- **Gauge de Feynman** ($\xi = 1$): $D_{\mu\nu}^{ab} = \delta^{ab}\delta_{\mu\nu}/(k_E^2 + m^2)$.
- **Gauge de Landau** ($\xi = 0$): $D_{\mu\nu}^{ab} = \delta^{ab}(\delta_{\mu\nu} - k_\mu k_\nu/k_E^2)/(k_E^2 + m^2)$.
- Para glúons/fótons ($m = 0$): $D_{\mu\nu}^{ab} = \delta^{ab}\delta_{\mu\nu}/k_E^2$ (Feynman gauge).

4.6 Representação Espectral (Källén-Lehmann) Euclidiana

O propagador exato (com interações) de um campo escalar possui a representação espectral:

$$\Delta_E(k) = \int_0^\infty \frac{d\mu^2 \rho(\mu^2)}{k_E^2 + \mu^2},$$

onde $\rho(\mu^2) \geq 0$ é a função espectral (positividade garantida pela unitariedade). Esta representação:

- Garante que $\Delta_E(k) > 0$ para todo k_E (desde que $\rho \geq 0$).
- Conecta polos isolados em $\mu^2 = m_{\text{phys}}^2$ a partículas estáveis.
- Cortes de ramo em $\mu^2 \geq 4m^2$ correspondem a estados multipartículas.

5 Funções de Green Euclidianas e Representação Espectral

5.1 Funções de Schwinger

As funções de Green euclidianas de n pontos (funções de Schwinger) são definidas como:

$$S_n(x_1, \dots, x_n) = \langle \phi(x_1) \cdots \phi(x_n) \rangle_E = \frac{\int \mathcal{D}\phi \phi(x_1) \cdots \phi(x_n) e^{-S_E}}{\int \mathcal{D}\phi e^{-S_E}}.$$

Sua relação com as funções de Green de tempo ordenado (Minkowski) é:

$$S_n(x_1^E, \dots, x_n^E) = \langle 0 | T \{ \phi(x_1^M) \cdots \phi(x_n^M) \} | 0 \rangle \Big|_{t_j \rightarrow -i\tau_j}.$$

5.2 Função de Dois Pontos e Gap de Massa

A função de dois pontos euclidiana $S_2(x) = \langle \phi(x)\phi(0) \rangle$ contém informação sobre o espectro de massa. Para separação puramente temporal:

$$S_2(\tau, \vec{0}) = \sum_n |\langle 0|\phi(0)|n \rangle|^2 e^{-E_n|\tau|} \xrightarrow{\tau \rightarrow \infty} |\langle 0|\phi|1 \rangle|^2 e^{-m|\tau|},$$

onde $m = E_1$ é a massa da partícula mais leve com os números quânticos de ϕ . Portanto:

$$m = - \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{d}{d\tau} \ln S_2(\tau, \vec{0}) = - \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{\partial_\tau S_2}{S_2}$$

Esta é a base da extração de massas em simulações de lattice QCD: mede-se o decaimento exponencial dos correladores euclidianos.

5.3 Funções de Schwinger Conexas e 1PI

O funcional gerador conexo $W_E[J] = \ln Z_E[J]$ gera as funções conexas:

$$G_n^c(x_1, \dots, x_n) = \left. \frac{\delta^n W_E}{\delta J(x_1) \cdots \delta J(x_n)} \right|_{J=0}.$$

A ação efetiva $\Gamma[\phi_c]$ (transformada de Legendre de W) gera as funções de vértice 1PI (one-particle irreducible):

$$\Gamma^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = \left. \frac{\delta^n \Gamma}{\delta \phi_c(x_1) \cdots \delta \phi_c(x_n)} \right|_{\phi_c = \langle \phi \rangle}.$$

A relação com o propagador exato: $\Gamma^{(2)}(k) = \Delta_E^{-1}(k) = k_E^2 + m^2 - \Sigma(k_E^2)$, onde Σ é a auto-energia.

6 Regularização no Espaço Euclidiano

6.1 Regularização Dimensional

A formulação euclidiana simplifica enormemente a regularização dimensional. Em $d = 4 - 2\epsilon$ dimensões, a integral fundamental é:

$$\int \frac{d^d k_E}{(2\pi)^d} \frac{1}{(k_E^2 + \Delta)^n} = \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \frac{\Gamma(n - d/2)}{\Gamma(n)} \frac{1}{\Delta^{n-d/2}}.$$

Para $n = 1$, $d = 4 - 2\epsilon$:

$$\int \frac{d^d k_E}{(2\pi)^d} \frac{1}{k_E^2 + m^2} = \frac{m^2}{(4\pi)^2} \left[\frac{1}{\epsilon} - \gamma_E + \ln(4\pi) - \ln \frac{m^2}{\mu^2} + 1 + \mathcal{O}(\epsilon) \right],$$

onde $\gamma_E \approx 0.5772$ é a constante de Euler-Mascheroni e μ é a escala de renormalização.

Integrais euclidianas fundamentais com numerador:

$$\int \frac{d^d k_E}{(2\pi)^d} \frac{k_\mu k_\nu}{(k_E^2 + \Delta)^n} = \frac{\delta_{\mu\nu}}{2} \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \frac{\Gamma(n - d/2 - 1)}{\Gamma(n)} \frac{1}{\Delta^{n-d/2-1}}, \quad (6)$$

$$\int \frac{d^d k_E}{(2\pi)^d} \frac{k^{2p}}{(k_E^2 + \Delta)^n} = \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \frac{\Gamma(p + d/2) \Gamma(n - p - d/2)}{\Gamma(d/2) \Gamma(n)} \frac{1}{\Delta^{n-p-d/2}}. \quad (7)$$

6.2 Parametrização de Feynman

Para combinar denominadores euclidianos:

$$\frac{1}{A^a B^b} = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \int_0^1 dx \frac{x^{a-1} (1-x)^{b-1}}{[xA + (1-x)B]^{a+b}}.$$

No espaço euclidiano, após a parametrização e o shift de momento, as integrais angulares são triviais (simetria $SO(d)$), e resta apenas a integral radial — uma enorme simplificação sobre o caso minkowskiano.

6.3 Cutoff Euclidiano

A regularização por cutoff no espaço euclidiano é direta:

$$\int \frac{d^4 k_E}{(2\pi)^4} \rightarrow \int_{|k_E| < \Lambda} \frac{d^4 k_E}{(2\pi)^4},$$

pois $|k_E|^2 = k_4^2 + |\vec{k}|^2 \geq 0$ define naturalmente uma região esférica. Em Minkowski, um cutoff $|k^2| < \Lambda^2$ não define uma região compacta no espaço de momentos (a hipérbole $k^2 = \text{const}$ é não-compacta).

6.4 Regularização Zeta

O determinante funcional de um operador euclidiano K (como $-\Delta + m^2$) pode ser regularizado via:

$$\ln \det K = -\zeta'_K(0), \quad \zeta_K(s) = \sum_n \lambda_n^{-s} = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty dt t^{s-1} \text{Tr}(e^{-tK}),$$

onde λ_n são os autovalores de K . A função zeta é analítica para $\text{Re}(s) > d/2$ e estende-se meromorficamente a todo o plano complexo. O valor $\zeta'_K(0)$ é finito e define o determinante regularizado.

6.5 Heat Kernel e Expansão Assintótica

O heat kernel $K(x, y; t) = \langle x | e^{-tD} | y \rangle$ (com $D = -\Delta + V$) possui a expansão assintótica para $t \rightarrow 0^+$:

$$\text{Tr}(e^{-tD}) = \frac{1}{(4\pi t)^{d/2}} \sum_{n=0}^{\infty} a_n(D) t^n,$$

onde os **coeficientes de Seeley-DeWitt** a_n são integrais de invariantes geométricos locais:

$$a_0 = \int d^d x \, 1 = \text{Vol}, \quad (8)$$

$$a_1 = \int d^d x \, \left(\frac{R}{6} - V \right), \quad (9)$$

$$a_2 = \int d^d x \, \left(\frac{1}{180} R^2_{\mu\nu\rho\sigma} - \frac{1}{180} R^2_{\mu\nu} + \frac{1}{6} \square V + \frac{1}{2} V^2 + \dots \right). \quad (10)$$

Estes coeficientes determinam as divergências da teoria e são fundamentais para a renormalização em espaços curvos.

7 Axiomas de Osterwalder-Schrader

A reconstrução da teoria quântica de campos minkowskiana a partir dos dados euclidianos é garantida pelos **axiomas de Osterwalder-Schrader** (1973, 1975). Uma teoria euclidiana satisfazendo estes axiomas define univocamente uma teoria quântica de campos relativística:

1. **Regularidade:** As funções de correlação (funções de Schwinger) $S_n(x_1, \dots, x_n)$ são distribuições temperadas.
2. **Covariância Euclidiana:** Invariância sob o grupo euclidiano $ISO(4) = SO(4) \ltimes \mathbb{R}^4$ (rotações e translações).
3. **Positividade de Reflexão (Osterwalder-Schrader):** Para qualquer funcional $F[\phi]$ com suporte em $\tau > 0$:

$$\langle \Theta F, F \rangle_E \geq 0,$$

onde Θ é a reflexão temporal $\tau \rightarrow -\tau$. Esta condição garante a **unitariedade** da teoria minkowskiana reconstruída.

4. **Simetria:** $S_n(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}) = S_n(x_1, \dots, x_n)$ para permutações σ (campos bosônicos).
5. **Clustering:** Para translações espaciais $a \rightarrow \infty$:

$$S_{n+m}(x_1, \dots, x_n, y_1 + a, \dots, y_m + a) \rightarrow S_n(x_1, \dots, x_n) \cdot S_m(y_1, \dots, y_m).$$

Garante a unicidade do vácuo.

O teorema de reconstrução de OS afirma: dada uma coleção de funções de Schwinger satisfazendo os axiomas acima, existe uma teoria quântica de campos no sentido de Wightman (espaço de Hilbert, operadores de campo, hamiltoniano positivo) cuja continuação analítica ao tempo euclidiano reproduz as funções de Schwinger originais.

7.1 Positividade de Reflexão em Detalhe

A positividade de reflexão (axioma 3) é a condição mais profunda e merece elaboração. Seja Θ a reflexão temporal:

$$(\Theta\phi)(x_1, x_2, x_3, x_4) = \phi(x_1, x_2, x_3, -x_4).$$

Considere o espaço $\mathcal{E}_+$ de funcionais $F[\phi]$ com suporte em $x_4 > 0$. A forma bilinear:

$$\langle F, G \rangle_{OS} \equiv \langle (\Theta F)^* \cdot G \rangle_E = \int \mathcal{D}\phi \overline{F[\Theta\phi]} G[\phi] e^{-S_E}$$

deve ser **positiva semi-definida**: $\langle F, F \rangle_{OS} \geq 0$ para todo $F \in \mathcal{E}_+$.

Significado físico: Esta forma bilinear torna-se o produto interno do espaço de Hilbert reconstruído. O kernel (elementos com norma zero) é quocientado, e o hamiltoniano reconstruído $H \geq 0$ é definido por:

$$e^{-H\tau} : [F(\phi|_{x_4>0})] \mapsto [F(\phi|_{x_4>\tau})].$$

Verificação para teoria livre: Para o campo livre, a positividade de reflexão segue da positividade do propagador euclidiano $\Delta_E(x) > 0$ para todo $x \neq 0$ (no caso escalar).

Exemplo de violação: Teorias com derivadas superiores (como $\mathcal{L} = \frac{1}{2}\phi(\Box^2 + m^2)\phi$) podem violar a positividade de reflexão, indicando que a teoria minkowskiana

correspondente não é unitária (possui fantasmas).

7.2 Relação com os Axiomas de Wightman

Os axiomas de Wightman para QFT em Minkowski exigem:

1. Espaço de Hilbert com representação unitária do grupo de Poincaré.
2. Espectro no cone de luz futuro ($p^2 \geq 0, p^0 \geq 0$).
3. Existência e unicidade do vácuo.
4. Campos como distribuições operatoriais.
5. Localidade (comutação a distâncias tipo-espaço).

O **teorema de reconstrução** estabelece uma bijeção:

$$\{\text{Axiomas de OS}\} \longleftrightarrow \{\text{Axiomas de Wightman}\}.$$

A direção Wightman $\rightarrow$ OS é a rotação de Wick (continuação analítica dos correladores). A direção OS $\rightarrow$ Wightman é a reconstrução, que usa a positividade de reflexão para construir o espaço de Hilbert e a covariância euclidiana para extrair a invariância de Poincaré via continuação analítica das rotações $SO(4)$ para boosts $SO(1,3)$.

7.3 Programa Construtivista

O programa de QFT construtiva usa os axiomas de OS como framework rigoroso:

- ϕ_2^4 (**Glimm-Jaffe, 1968**): Primeira QFT interagente em $d = 2$ rigorosamente construída.
- ϕ_3^4 (**Feldman-Osterwalder, 1976**): Teoria em $d = 3$ com renormalização.
- ϕ_4^4 (**em aberto**): A existência de ϕ^4 em $d = 4$ continua não-demonstrada (suspeita-se de trivialidade — o acoplamento renormalizado vai a zero no limite contínuo).
- **Yang-Mills em $d = 4$ (Millennium Problem)**: Demonstrar existência e gap de massa em Yang-Mills 4D é um dos problemas do milênio do Clay Institute.

Parte II

Ação Euclidiana e Integral de Caminho

A integral de caminho euclidiana é a formulação central da QFT euclidiana. Ao substituir o fator oscilatório e^{iS_M} pelo fator de supressão e^{-S_E} , a integral funcional adquire propriedades de convergência análogas às de uma integral de probabilidade, estabelecendo uma conexão direta com a mecânica estatística clássica.

- **Ação Euclidiana para Campos Escalares, Fermiônicos e de Gauge:** Derivação explícita das ações euclidianas a partir da rotação de Wick.
- **Integral Funcional Euclidiana:** A medida funcional, convergência e regularização.
- **Funções de Correlação:** Funções de Schwinger como momentos da medida euclidiana.
- **Correspondência com Mecânica Estatística:** A integral de caminho euclidiana como função de partição.
- **Método do Ponto de Sela e Aproximação Semiclássica:** Expansão ao redor de soluções clássicas euclidianas e flutuações quânticas.
- **Teorema de Vafa-Witten e Positividade:** Consequências da positividade da medida euclidiana.
- **Integral de Caminho para Sistemas com Vínculos:** Procedimento de Faddeev-Popov no espaço euclidiano.

1 Construção da Ação Euclidiana

1.1 Campo Escalar Real

A lagrangiana de Minkowski para um campo escalar real ϕ com auto-interação é:

$$\mathcal{L}_M = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)(\partial^\mu \phi) - V(\phi) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 - \frac{1}{2}(\nabla \phi)^2 - V(\phi).$$

A ação minkowskiana é:

$$S_M = \int dt d^3x \mathcal{L}_M.$$

Sob a rotação de Wick $t = -i\tau$, temos $dt = -id\tau$ e $\partial_t = i\partial_\tau$:

$$\begin{aligned} iS_M &= i \int (-id\tau) d^3x \left[\frac{1}{2}(i\partial_\tau \phi)^2 - \frac{1}{2}(\nabla \phi)^2 - V(\phi) \right] \\ &= \int d\tau d^3x \left[-\frac{1}{2}(\partial_\tau \phi)^2 - \frac{1}{2}(\nabla \phi)^2 - V(\phi) \right] = -S_E. \end{aligned}$$

Portanto, a **ação euclidiana** para o campo escalar é:

$$S_E[\phi] = \int d^4x_E \left[\frac{1}{2}(\partial_\mu^E \phi)(\partial_\mu^E \phi) + V(\phi) \right]$$

onde $\partial_\mu^E \partial_\mu^E = \partial_\tau^2 + \nabla^2$ é o laplaciano em $\mathbb{R}^4$. Note que:

- Todos os termos cinéticos aparecem com sinal positivo.
- O potencial $V(\phi)$ mantém o mesmo sinal.
- A ação euclidiana é **limitada inferiormente**: $S_E \geq 0$ para $V \geq 0$.

Para o caso $V(\phi) = \frac{1}{2}m^2\phi^2 + \frac{\lambda}{4!}\phi^4$:

$$S_E[\phi] = \int d^4x_E \left[\frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)^2 + \frac{1}{2}m^2\phi^2 + \frac{\lambda}{4!}\phi^4 \right].$$

1.2 Campo Escalar Complexo

Para um campo escalar complexo ϕ :

$$S_E[\phi, \phi^*] = \int d^4x_E [(\partial_\mu \phi^*)(\partial_\mu \phi) + m^2 |\phi|^2 + \lambda |\phi|^4].$$

1.3 Campo de Dirac

A ação euclidiana para férmions requer a definição de matrizes gama euclidianas. Com γ_E^μ satisfazendo $\{\gamma_E^\mu, \gamma_E^\nu\} = 2\delta^{\mu\nu}$:

$$S_E[\bar{\psi}, \psi] = \int d^4x_E \bar{\psi}(\gamma_E^\mu \partial_\mu + m)\psi$$

Note que no espaço euclidiano, $\bar{\psi}$ e ψ são tratados como campos de Grassmann **independentes** (não mais relacionados por $\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0$). O operador de Dirac euclidiano $\not{D}_E = \gamma_E^\mu D_\mu$ é **anti-hermitiano**, garantindo que S_E seja real.

As matrizes gama euclidianas podem ser escolhidas como:

$$\gamma_E^1 = \begin{pmatrix} 0 & i\sigma^1 \\ -i\sigma^1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_E^2 = \begin{pmatrix} 0 & i\sigma^2 \\ -i\sigma^2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_E^3 = \begin{pmatrix} 0 & i\sigma^3 \\ -i\sigma^3 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_E^4 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}.$$

A matriz γ_E^5 é definida como:

$$\gamma_E^5 = \gamma_E^1 \gamma_E^2 \gamma_E^3 \gamma_E^4 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}.$$

1.4 Campos de Gauge (Yang-Mills)

Para um campo de gauge não-abeliano com grupo G (como $SU(N)$), o tensor de campo euclidiano é:

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + gf^{abc} A_\mu^b A_\nu^c,$$

e a ação euclidiana de Yang-Mills é:

$$S_E^{YM} = \frac{1}{4} \int d^4x_E F_{\mu\nu}^a F_{\mu\nu}^a = \frac{1}{2} \int d^4x_E \text{tr}(F_{\mu\nu} F_{\mu\nu})$$

Note que no espaço euclidiano:

- Não há distinção entre índices superiores e inferiores: $F_{\mu\nu}F_{\mu\nu}$ com soma sobre $\mu, \nu = 1, 2, 3, 4$.
- A ação é **positiva-definida**: $S_E^{YM} \geq 0$, com igualdade apenas para $F_{\mu\nu} = 0$.
- A invariância de gauge permanece inalterada.

1.5 Ação Euclidiana Completa com Matéria

A ação euclidiana total para uma teoria de gauge com férmions e escalares é:

$$S_E = S_E^{YM} + S_E^{\text{fermions}} + S_E^{\text{scalar}} + S_E^{\text{Yukawa}},$$

onde:

$$S_E^{\text{fermions}} = \int d^4x_E \bar{\psi}(\gamma_E^\mu D_\mu + m)\psi, \quad (11)$$

$$S_E^{\text{scalar}} = \int d^4x_E [(D_\mu \phi)^\dagger (D_\mu \phi) + V(\phi)], \quad (12)$$

$$S_E^{\text{Yukawa}} = \int d^4x_E y \bar{\psi} \phi \psi. \quad (13)$$

2 Integral Funcional Euclidiana

2.1 Definição e Convergência

A integral funcional euclidiana é definida como:

$$Z_E = \int \mathcal{D}\phi e^{-S_E[\phi]}$$

A crucial diferença em relação à formulação minkowskiana $Z_M = \int \mathcal{D}\phi e^{iS_M}$ é que o peso e^{-S_E} é:

- **Real e positivo** (para $S_E \geq 0$).
- **Exponencialmente suprimido** para configurações de alta ação.
- Interpretável como uma **medida de probabilidade** (após normalização).

Isto torna a integral euclidiana um objeto matematicamente mais bem definido, análogo à função de partição da mecânica estatística.

2.2 Funções de Correlação (Funções de Schwinger)

As funções de correlação euclidianas — ou **funções de Schwinger** — são definidas como valores esperados:

$$\langle \phi(x_1)\phi(x_2)\cdots\phi(x_n) \rangle_E = \frac{1}{Z_E} \int \mathcal{D}\phi \, \phi(x_1)\phi(x_2)\cdots\phi(x_n) e^{-S_E[\phi]}.$$

A relação com as funções de Green de Minkowski (funções de Wightman ordenadas no tempo) é:

$$\langle 0|T\{\phi(x_1)\cdots\phi(x_n)\}|0\rangle_M = \langle \phi(x_1^E)\cdots\phi(x_n^E) \rangle_E \Big|_{\tau_j \rightarrow it_j}.$$

2.3 Funcional Gerador

O funcional gerador com fonte J é:

$$Z_E[J] = \int \mathcal{D}\phi \exp \left\{ -S_E[\phi] + \int d^4x_E J(x)\phi(x) \right\},$$

e as funções de Schwinger são obtidas por derivação funcional:

$$\langle \phi(x_1)\cdots\phi(x_n) \rangle_E = \frac{1}{Z_E[0]} \frac{\delta^n Z_E[J]}{\delta J(x_1)\cdots\delta J(x_n)} \Big|_{J=0}.$$

O funcional gerador de correlações conexas é:

$$W_E[J] = \ln Z_E[J],$$

e a ação efetiva (funcional de Gibbs) é obtida pela transformada de Legendre:

$$\Gamma_E[\phi_c] = \sup_J \left\{ \int J\phi_c - W_E[J] \right\}, \quad \phi_c(x) = \frac{\delta W_E}{\delta J(x)}.$$

2.4 Integral Gaussiana Funcional

Para a ação quadrática $S_E[\phi] = \frac{1}{2} \int \phi K \phi$ com operador $K = -\partial^2 + m^2$:

$$Z_E[J] = Z_E[0] \exp \left\{ \frac{1}{2} \int d^4x d^4y J(x) K^{-1}(x, y) J(y) \right\},$$

onde $K^{-1}(x, y) = \Delta_E(x - y)$ é o propagador euclidiano. O resultado formal é:

$$Z_E[0] = (\det K)^{-1/2}.$$

Para campos fermiônicos (integrais de Grassmann):

$$\int \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi e^{-\int \bar{\psi} M \psi} = \det M,$$

onde $M = \not{D}_E + m$ é o operador de Dirac euclidiano.

3 Método do Ponto de Sela e Aproximação Semiclássica

3.1 Princípio Geral

Na integral funcional euclidiana $Z = \int \mathcal{D}\phi e^{-S_E[\phi]}$, o peso e^{-S_E} é máximo quando S_E é mínimo. Para acoplamentos fracos (ou $\hbar$ pequeno), a integral é dominada pela vizinhança das soluções clássicas ϕ_c que satisfazem:

$$\left. \frac{\delta S_E}{\delta \phi} \right|_{\phi_c} = 0 \quad (\text{equações de Euler-Lagrange euclidianas}).$$

Expandindo ao redor da solução clássica $\phi = \phi_c + \eta$:

$$S_E[\phi_c + \eta] = S_E[\phi_c] + \frac{1}{2} \int d^4x d^4y \eta(x) \left. \frac{\delta^2 S_E}{\delta \phi(x) \delta \phi(y)} \right|_{\phi_c} \eta(y) + \mathcal{O}(\eta^3).$$

3.2 Determinante Funcional

A integral gaussiana sobre flutuações fornece:

$$Z \approx e^{-S_E[\phi_c]} \cdot \left[\det \left(\left. \frac{\delta^2 S_E}{\delta \phi \delta \phi} \right|_{\phi_c} \right) \right]^{-1/2} \cdot [1 + \mathcal{O}(\text{loops})].$$

Para o campo escalar com $S_E = \int \frac{1}{2} \phi (-\partial^2 + m^2 + V''(\phi_c)) \phi$, o operador de flutuação é:

$$\mathcal{M} = -\partial^2 + m^2 + V''(\phi_c),$$

e o prefator quântico de um loop é $(\det \mathcal{M})^{-1/2}$.

3.3 Modos Zero e Parâmetros Coletivos

Quando a solução clássica ϕ_c possui simetrias (translação, rotação, dilatação), o operador de flutuação $\mathcal{M}$ possui **modos zero**: autovetores η_0 com autovalor nulo ($\mathcal{M}\eta_0 = 0$). Estes correspondem a direções ao longo das quais a ação não muda (os “módulos” da solução).

Os modos zero devem ser tratados separadamente mediante a técnica de **coordenadas coletivas**:

$$\int \mathcal{D}\eta \rightarrow \int d\xi \cdot J(\xi) \cdot \int' \mathcal{D}\eta,$$

onde ξ é o parâmetro coletivo (posição, tamanho, etc.), J é o jacobiano da mudança de variáveis, e $\int'$ indica integração apenas sobre modos não-zero.

Para um instanton com centro x_0 , os 4 modos zero translacionais produzem:

$$J = \left(\frac{S_0}{2\pi} \right)^{1/2} \quad \text{por modo zero,}$$

resultando em:

$$Z_{1\text{-inst}} = V_4 \left(\frac{S_0}{2\pi} \right)^2 \left[\frac{\det'(\mathcal{M}_{\text{inst}})}{\det(\mathcal{M}_{\text{v\u00e1cuo}})} \right]^{-1/2} e^{-S_0},$$

onde V_4 é o volume do espaço-tempo e $\det'$ omite os modos zero.

3.4 Modos Negativos e Instabilidades

Se o operador $\mathcal{M}$ possui um autovalor negativo ($\mathcal{M}\eta_- = -\lambda^2\eta_-$ com $\lambda^2 > 0$), a solução clássica não é um mínimo mas um **ponto de sela** da ação euclidiana. A integral gaussiana nesta direção produz um fator imaginário:

$$\int d\alpha e^{+\frac{\lambda^2}{2}\alpha^2} \rightarrow \frac{i}{2} \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda^2}},$$

indicando uma **taxa de decaimento** (instabilidade do vácuo):

$$\Gamma = 2|\text{Im } E| \propto e^{-S_E[\phi_c]}.$$

Este é o mecanismo de **decaimento do falso vácuo** (Coleman, 1977): um mínimo local de $V(\phi)$ pode tunelar para o mínimo global, com taxa controlada pela ação do “bounce” euclidiano.

4 Procedimento de Faddeev-Popov no Espaço Euclidiano

4.1 Fixação de Gauge

Para teorias de gauge, a integral funcional $\int \mathcal{D}A e^{-S_E^{YM}}$ é divergente pois integra sobre configurações fisicamente equivalentes (órbitas de gauge). O procedimento de Faddeev-Popov fixa esta redundância:

$$Z_E = \int \mathcal{D}A \mathcal{D}\bar{c} \mathcal{D}c e^{-S_E^{YM} - S_{\text{gf}} - S_{\text{ghost}}},$$

onde:

$$S_{\text{gf}} = \frac{1}{2\xi} \int d^4x_E (\partial_\mu A_\mu^a)^2 \quad (\text{termo de fixação de gauge}), \quad (14)$$

$$S_{\text{ghost}} = \int d^4x_E \bar{c}^a (-\partial_\mu D_\mu^{ab}) c^b \quad (\text{ghosts de Faddeev-Popov}). \quad (15)$$

4.2 Ghosts Euclidianos

Os campos ghost c^a , $\bar{c}^a$ são campos escalares anticomutantes (Grassmann) no espaço euclidiano. O operador de ghost $M^{ab} = -\partial_\mu D_\mu^{ab} = -\delta^{ab} \partial^2 - g f^{abc} \partial_\mu A_\mu^c - g f^{abc} A_\mu^c \partial_\mu$ é um operador elíptico no espaço euclidiano.

A contribuição dos ghosts ao determinante é:

$$\int \mathcal{D}\bar{c} \mathcal{D}c e^{-\int \bar{c} M c} = \det M,$$

(determinante sem o inverso, pois ghosts são anticomutantes).

4.3 Simetria BRST Euclidiana

A simetria BRST persiste na formulação euclidiana. Com o operador BRST s :

$$s A_\mu^a = D_\mu^{ab} c^b, \quad (16)$$

$$s c^a = -\frac{g}{2} f^{abc} c^b c^c, \quad (17)$$

$$s \bar{c}^a = \frac{1}{\xi} \partial_\mu A_\mu^a, \quad (18)$$

a ação total é s -exata: $S_{\text{gf}} + S_{\text{ghost}} = s\Psi$ para um gauge fermion Ψ apropriado, garantindo independência de gauge das quantidades físicas.

5 Positividade e Teoremas Rigorosos

5.1 Teorema de Vafa-Witten (1984)

A positividade da medida euclidiana permite demonstrar resultados não-perturbativos rigorosos. O **teorema de Vafa-Witten** afirma que, em QCD com $\theta = 0$:

Simetrias vetoriais (como isospin $SU(N_f)_V$ e paridade) não podem ser espontaneamente quebradas.

Demonstração (esboço): A função de partição de QCD euclidiana com fonte vetorial v_μ é:

$$Z[v] = \int \mathcal{D}A \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi e^{-S_{QCD} + \int \bar{\psi} \gamma_\mu v^\mu \psi}.$$

A positividade do determinante fermiônico (para número par de sabores degenerados e $\theta = 0$) implica $Z[0] \geq Z[v]$ para qualquer fonte vetorial, o que por sua vez implica $\langle V_\mu^a \rangle = 0$ para qualquer corrente vetorial conservada. Logo, nenhuma simetria vetorial pode ser espontaneamente quebrada.

5.2 Desigualdades de Correlação

A positividade de e^{-S_E} permite derivar desigualdades rigorosas entre funções de correlação:

1. Desigualdade de Griffiths: Para campo escalar com $V(\phi) = V(-\phi)$ (simetria $\mathbb{Z}_2$):

$$\langle \phi(x) \phi(y) \rangle_E \geq 0 \quad \forall x, y.$$

2. Segunda desigualdade de Griffiths (GKS):

$$\langle \phi(x_1) \phi(x_2) \phi(x_3) \phi(x_4) \rangle_E \geq \langle \phi(x_1) \phi(x_2) \rangle \langle \phi(x_3) \phi(x_4) \rangle + \text{permutações}.$$

3. Limitação de Simon-Lieb: Permite demonstrar decaimento exponencial de correlações e existência de gap de massa.

5.3 Desigualdade de Nelson (Hipercontratividade)

Para o campo livre euclidiano, a estimativa de Nelson garante que:

$$\|\phi\|_{L^p} \leq C(p, q) \|\phi\|_{L^q} \quad \text{para } 1 < q < p,$$

com constantes explícitas. Esta propriedade de **hipercontratividade** é fundamental para o controle de interações em QFT construtiva.

6 Energia do Vácuo e Efeito Casimir Euclidiano

6.1 Energia de Vácuo como Determinante Funcional

A energia do vácuo por unidade de volume é:

$$\mathcal{E}_{\text{vac}} = - \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \ln Z = \frac{1}{2} \text{Tr} \ln(-\partial^2 + m^2) \quad (\text{campo escalar}).$$

Na formulação euclidiana com condições de contorno (placas paralelas separadas por distância a), o espectro de $-\partial_z^2$ é discretizado: $k_z = n\pi/a$. A diferença entre energias com e sem placas, regularizada por função zeta, fornece a **pressão de Casimir**:

$$P_{\text{Casimir}} = -\frac{\pi^2}{240a^4},$$

resultado derivável inteiramente dentro do formalismo euclidiano.

6.2 Efeito Casimir Térmico

A temperatura finita (compactificação temporal euclidiana com período β) combinada com a compactificação espacial (placas) resulta em:

$$\mathcal{E}(a, T) = \mathcal{E}_{\text{Casimir}}(a) + \mathcal{E}_{\text{térmica}}(a, T),$$

onde a contribuição térmica domina para $a \gg \beta$ (alta temperatura):

$$P_{\text{Casimir}}(T) \approx -\frac{\zeta(3)}{8\pi} \frac{T}{a^3} \quad (aT \gg 1).$$

Parte III

Mecânica Estatística e Teoria de Campos

A correspondência entre QFT euclidiana e mecânica estatística é uma das revelações mais profundas da física teórica. Uma teoria quântica de campos em d dimensões euclidianas é matematicamente equivalente a um sistema de mecânica estatística clássica em d dimensões. Esta conexão não é apenas formal — ela permite importar técnicas poderosas de ambas as áreas.

Os tópicos abordados nesta parte incluem:

- **A Correspondência Fundamental:** O dicionário completo entre QFT euclidiana e mecânica estatística, com exemplos explícitos.
- **Modelos de Spin e Limite Contínuo:** Do modelo de Ising discreto à teoria ϕ^4 contínua.
- **Grupo de Renormalização de Wilson:** Fluxo, pontos fixos, operadores relevantes/irrelevantes e universalidade.
- **Teoria de Campos Conforme (CFT):** Invariância conforme no ponto crítico e consequências.
- **Expansão $\epsilon = 4 - d$:** Cálculo sistemático de expoentes críticos.
- **Teoria de Landau-Ginzburg:** Descrição efetiva de transições de fase via funcional euclidiano.
- **Teoria de Campos a Temperatura Finita:** Formalismo de tempo imaginário, topologia cilíndrica $S^1_\beta \times \mathbb{R}^3$, e a emergência da mecânica estatística como consequência geométrica da rotação de Wick.

1 A Correspondência Fundamental

1.1 Dicionário QFT Euclidiana $\leftrightarrow$ Mecânica Estatística

A correspondência é estabelecida pela identificação:

QFT Euclidiana	Mecânica Estatística
Integral funcional $Z_E = \int \mathcal{D}\phi e^{-S_E}$	Função de partição $Z = \sum_{\text{config}} e^{-\beta H}$
Ação euclidiana $S_E[\phi]$	Hamiltoniano $\beta H[\sigma]$
Campo $\phi(x)$	Variável de spin / parâmetro de ordem $\sigma(x)$
Constante de acoplamento λ	Temperatura inversa $\beta = 1/k_B T$
Massa m	Comprimento de correlação inverso ξ^{-1}
$m \rightarrow 0$ (teoria sem massa)	Ponto crítico ($\xi \rightarrow \infty$)
Funções de Schwinger	Funções de correlação
Ação efetiva $\Gamma[\phi_c]$	Energia livre de Gibbs
Grupo de renormalização	Grupo de renormalização (Kadanoff-Wilson)
Anomalia dimensional	Expoentes críticos

Tabela 2: Dicionário entre QFT euclidiana e mecânica estatística.

1.2 Exemplo: Modelo ϕ^4 e Modelo de Ising

O modelo de Ising em d dimensões, no limite contínuo próximo ao ponto crítico, é descrito pela teoria ϕ^4 euclidiana:

$$S_E = \int d^d x \left[\frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 + \frac{1}{2} r \phi^2 + \frac{u}{4!} \phi^4 \right],$$

onde:

- $r \propto (T - T_c)/T_c$ é o parâmetro de desvio da temperatura crítica.
- $u > 0$ é o acoplamento quártico (estabilidade).
- ϕ é a magnetização local (parâmetro de ordem).

Para $r > 0$: fase desordenada ($\langle \phi \rangle = 0$, fase simétrica). Para $r < 0$: fase ordenada ($\langle \phi \rangle \neq 0$, quebra espontânea da simetria $\mathbb{Z}_2$).

1.3 Transições de Fase e Universalidade

Próximo ao ponto crítico, o comprimento de correlação diverge como:

$$\xi \sim |T - T_c|^{-\nu},$$

onde ν é o expoente crítico de correlação. Na correspondência com QFT, $\xi \rightarrow \infty$ corresponde a $m \rightarrow 0$, e a teoria torna-se invariante conforme no ponto fixo do grupo de renormalização.

Os expoentes críticos são universais — dependem apenas da dimensionalidade d e das simetrias do parâmetro de ordem, não dos detalhes microscópicos. Esta universalidade é explicada pelo **grupo de renormalização de Wilson**: as teorias no ponto crítico fluem para pontos fixos infravermelhos sob o fluxo do grupo de renormalização, onde detalhes de curta distância são irrelevantes.

1.4 Dimensão Crítica Superior

Para a teoria ϕ^4 , a dimensão crítica superior é $d_c = 4$:

- Para $d > 4$: expoentes de campo médio (teoria gaussiana), acoplamento u é irrelevante.
- Para $d = 4$: correções logarítmicas (marginalidade do acoplamento).
- Para $d < 4$: expoentes não-triviais, calculáveis via expansão $\epsilon = 4 - d$ (Wilson-Fisher).

No ponto fixo de Wilson-Fisher ($d = 4 - \epsilon$), os expoentes críticos são:

$$\nu = \frac{1}{2} + \frac{\epsilon}{12} + \frac{7\epsilon^2}{162} + \mathcal{O}(\epsilon^3), \quad (19)$$

$$\eta = \frac{\epsilon^2}{54} + \mathcal{O}(\epsilon^3), \quad (20)$$

$$\gamma = 1 + \frac{\epsilon}{6} + \frac{19\epsilon^2}{324} + \mathcal{O}(\epsilon^3). \quad (21)$$

2 Grupo de Renormalização de Wilson

2.1 Ideia Fundamental

O grupo de renormalização (RG) de Wilson fornece a compreensão conceitual mais profunda da conexão entre QFT e mecânica estatística. A ideia central: integrar progressivamente graus de liberdade de alta energia (curta distância) e observar como a teoria efetiva muda.

O procedimento consiste em três passos:

1. **Integrar modos de alta frequência:** Dividir $\phi = \phi_{<} + \phi_{>}$ onde $\phi_{>}$ contém modos com $\Lambda/b < |k| < \Lambda$, e integrar $\phi_{>}$:

$$e^{-S_{\text{eff}}[\phi_{<}]} = \int \mathcal{D}\phi_{>} e^{-S[\phi_{<} + \phi_{>}]}$$

2. **Reescalar:** $x \rightarrow bx$, $k \rightarrow k/b$ para restaurar o cutoff original.
3. **Renormalizar campos:** $\phi_{<} \rightarrow b^{(d-2+\eta)/2} \phi$ para manter a normalização.

2.2 Equação do Fluxo

O fluxo do grupo de renormalização é descrito por funções beta. Para a teoria ϕ^4 em $d = 4 - \epsilon$:

$$\mu \frac{dg}{d\mu} = \beta(g) = -\epsilon g + \frac{3g^2}{(4\pi)^2} + \mathcal{O}(g^3),$$

onde $g = \lambda\mu^{-\epsilon}$ é o acoplamento adimensional. O ponto fixo não-trivial (Wilson-Fisher) está em:

$$g^* = \frac{(4\pi)^2 \epsilon}{3} + \mathcal{O}(\epsilon^2).$$

2.3 Operadores Relevantes, Marginais e Irrelevantes

No ponto fixo, operadores compostos $\mathcal{O}_i$ possuem dimensões anômalas:

$$[\mathcal{O}_i] = d - y_i,$$

onde y_i é o expoente de escala. Classificação:

- $y_i > 0$: operador **relevante** (cresce sob RG, deve ser ajustado — fine-tuning).
- $y_i = 0$: operador **marginal** (requer análise de ordens superiores).
- $y_i < 0$: operador **irrelevante** (decai sob RG, contribui com correções $\sim a^{|y_i|}$).

Na teoria ϕ^4 : ϕ^2 é relevante ($y = 2 - \eta \approx 2$), ϕ^4 é marginal em $d = 4$ (relevante para $d < 4$), ϕ^6 é irrelevante.

2.4 Equação de Callan-Symanzik

As funções de Green renormalizadas satisfazem a equação de Callan-Symanzik:

$$\left[\mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \beta(g) \frac{\partial}{\partial g} + n\gamma(g) \right] G^{(n)}(x_1, \dots, x_n; \mu, g) = 0,$$

onde $\gamma(g) = \mu \frac{d \ln Z_\phi}{d\mu}$ é a dimensão anômala do campo. No ponto fixo $g = g^*$:

$$G^{(n)}(\lambda x_1, \dots, \lambda x_n) = \lambda^{-n(d-2+\eta)/2} G^{(n)}(x_1, \dots, x_n),$$

com $\eta = 2\gamma(g^*)$ — a teoria é invariante de escala (conforme).

3 Teoria de Campos Conforme no Ponto Crítico

3.1 Invariância Conforme

No ponto fixo do grupo de renormalização, a teoria euclidiana é invariante sob o grupo conforme — extensão do grupo euclidiano que inclui:

- Translações: $x_\mu \rightarrow x_\mu + a_\mu$ (d geradores).
- Rotações: $x_\mu \rightarrow R_{\mu\nu} x_\nu$ ($d(d-1)/2$ geradores).
- Dilatações: $x_\mu \rightarrow \lambda x_\mu$ (1 gerador).
- Transformações conformes especiais (SCT): $x_\mu \rightarrow \frac{x_\mu - b_\mu x^2}{1 - 2b \cdot x + b^2 x^2}$ (d geradores).

Total: $\frac{(d+1)(d+2)}{2}$ geradores. Em $d = 4$: 15 geradores (isomorfo a $SO(5, 1)$).

3.2 Restrições sobre Correladores

A invariância conforme fixa completamente as funções de 2 e 3 pontos (a menos de constantes):

$$\langle \phi_i(x) \phi_j(y) \rangle = \frac{C_{ij} \delta_{\Delta_i, \Delta_j}}{|x - y|^{2\Delta_i}},$$

$$\langle \phi_i(x_1) \phi_j(x_2) \phi_k(x_3) \rangle = \frac{C_{ijk}}{|x_{12}|^{\Delta_i + \Delta_j - \Delta_k} |x_{23}|^{\Delta_j + \Delta_k - \Delta_i} |x_{13}|^{\Delta_i + \Delta_k - \Delta_j}},$$

onde Δ_i são as dimensões de escala e C_{ijk} os coeficientes OPE.

3.3 Expansão em Produto de Operadores (OPE)

A OPE euclidiana:

$$\phi_i(x) \phi_j(0) = \sum_k C_{ijk}(x) \mathcal{O}_k(0),$$

com coeficientes $C_{ijk}(x) \sim |x|^{\Delta_k - \Delta_i - \Delta_j}$, converge no espaço euclidiano (não apenas como expansão assintótica). A convergência é garantida pela positividade da medida euclidiana e pela completeza do espaço de operadores.

3.4 Bootstrap Conforme

O programa de bootstrap conforme moderno explora:

- Associatividade da OPE $\Rightarrow$ equações de crossing.
- Unitariedade $\Rightarrow$ positividade de coeficientes OPE ao quadrado.
- Limites rigorosos sobre dimensões e OPE (Rattazzi et al., 2008; El-Showk et al., 2012).

Resultado notável: o bootstrap determina os expoentes críticos do modelo de Ising 3D com precisão superior à de simulações de Monte Carlo:

$$\Delta_\sigma = 0.5181489(10), \quad \Delta_\epsilon = 1.412625(10).$$

4 Modelo de Landau-Ginzburg

4.1 Funcional de Energia Livre

O funcional de Landau-Ginzburg é a ação euclidiana efetiva para o parâmetro de ordem ϕ de uma transição de fase:

$$\beta F[\phi] = \int d^d x \left[\frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 + \frac{r}{2} \phi^2 + \frac{u}{4!} \phi^4 - h \phi \right],$$

onde:

- $r = r_0(T - T_c)/T_c$: coeficiente de massa (muda de sinal em T_c).
- $u > 0$: acoplamento quártico (estabilidade).
- h : campo externo (quebra explícita de simetria).
- O termo cinético $(\nabla \phi)^2$ penaliza variações espaciais.

4.2 Aproximação de Campo Médio (Saddle Point)

Ignorando flutuações ($\phi(x) = \phi_0 = \text{const}$), minimizamos:

$$\frac{\partial V}{\partial \phi_0} = r \phi_0 + \frac{u}{6} \phi_0^3 - h = 0.$$

Para $h = 0$:

$$\phi_0 = \begin{cases} 0 & \text{se } r > 0 \text{ (fase desordenada),} \\ \pm\sqrt{-6r/u} & \text{se } r < 0 \text{ (fase ordenada).} \end{cases}$$

Expoentes de campo médio: $\beta_{MF} = 1/2$, $\gamma_{MF} = 1$, $\delta_{MF} = 3$, $\nu_{MF} = 1/2$, $\alpha_{MF} = 0$, $\eta_{MF} = 0$.

4.3 Critério de Ginzburg

Flutuações invalidam campo médio quando sua contribuição à suscetibilidade excede o valor de campo médio. O **critério de Ginzburg** determina que campo médio falha para:

$$|T - T_c| < T_c \cdot \left(\frac{u}{r_0^2 \xi_0^d} \right)^{2/(4-d)} \equiv T_c \cdot \text{Gi},$$

onde Gi é o número de Ginzburg. Para $d \geq 4$ (dimensão crítica superior), $\text{Gi} \rightarrow 0$ e campo médio é exato. Para $d < 4$, as flutuações dominam perto de T_c .

4.4 Flutuações Gaussianas e Correção de Ornstein-Zernike

Expandindo ao redor de campo médio $\phi = \phi_0 + \delta\phi$, o correlador gaussiano é:

$$\langle \delta\phi(\vec{k}) \delta\phi(-\vec{k}) \rangle = \frac{1}{k^2 + \xi^{-2}},$$

com comprimento de correlação:

$$\xi = \begin{cases} r^{-1/2} & (T > T_c, \text{ fase desordenada}), \\ (2|r|)^{-1/2} & (T < T_c, \text{ fase ordenada}). \end{cases}$$

No espaço de posição ($d = 3$):

$$G(r) = \langle \delta\phi(\vec{x}) \delta\phi(0) \rangle \sim \frac{e^{-r/\xi}}{r^{(d-2)/2}} \xrightarrow{T=T_c} \frac{1}{r^{d-2+\eta}},$$

onde o expoente η captura a correção anômala ao decaimento em lei de potência no ponto crítico.

5 Modelos $O(N)$ e Simetria Contínua

5.1 Definição

A generalização natural do modelo de Ising (simetria $\mathbb{Z}_2$) é o modelo $O(N)$ com campo vetorial $\vec{\phi} = (\phi_1, \dots, \phi_N)$:

$$S_E = \int d^d x \left[\frac{1}{2} (\partial_\mu \vec{\phi})^2 + \frac{r}{2} |\vec{\phi}|^2 + \frac{u}{4!} (|\vec{\phi}|^2)^2 \right].$$

Casos fisicamente relevantes:

- $N = 1$: modelo de Ising (transição líquido-gás, ferromagneto uniaxial).
- $N = 2$: modelo XY (superfluidez, supercondutividade, filme de hélio).
- $N = 3$: modelo de Heisenberg (ferromagneto isotrópico).
- $N = 4$: setor de Higgs do Modelo Padrão.
- $N \rightarrow \infty$: modelo esférico (exatamente solúvel).
- $N = 0$: polímeros auto-evitantes (de Gennes).

5.2 Teorema de Goldstone e Ondas de Spin

Para $r < 0$ e $N \geq 2$, a simetria $O(N)$ quebra espontaneamente para $O(N-1)$, produzindo $N-1$ **bósons de Goldstone** (modos sem massa). No espaço euclidiano, estes se manifestam como direções de flutuação com comprimento de correlação infinito.

A parametrização não-linear $\vec{\phi} = (\sigma + v)\hat{n}$ com $\hat{n} \in S^{N-1}$ separa o modo massivo σ (modo radial, massa $\sim \sqrt{2|r|}$) dos modos de Goldstone (ondas de spin, sem massa).

O **modelo sigma não-linear** descreve apenas os modos de Goldstone a baixas energias:

$$S_{\text{NL}\sigma} = \frac{f^2}{2} \int d^d x (\partial_\mu \hat{n})^2, \quad |\hat{n}|^2 = 1.$$

5.3 Limite $N \rightarrow \infty$ e Aproximação de Campo Médio

No limite $N \rightarrow \infty$ com uN fixo, a teoria $O(N)$ torna-se exatamente solúvel. Introduzindo o campo auxiliar $\sigma = u|\vec{\phi}|^2/6$ (transformação de Hubbard-Stratonovich):

$$S = \int d^d x \left[\frac{1}{2} (\partial_\mu \vec{\phi})^2 + \frac{\sigma}{2} |\vec{\phi}|^2 - \frac{3\sigma^2}{2u} \right].$$

A equação de gap (ponto de sela em σ) determina a massa efetiva:

$$\sigma_0 = r + \frac{uN}{6} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{k^2 + \sigma_0}.$$

Expoentes críticos exatos em $N \rightarrow \infty$: $\nu = 1/(d-2)$, $\eta = 0$, $\gamma = 2/(d-2)$ (para $2 < d < 4$).

5.4 Teorema de Mermin-Wagner-Coleman

No espaço euclidiano, o **teorema de Mermin-Wagner** (mecânica estatística) / **Coleman** (QFT) afirma:

Em $d \leq 2$ dimensões, simetrias contínuas não podem ser espontaneamente quebradas para sistemas com interações de curto alcance.

Demonstração euclidiana (esboço): Se houvesse quebra, existiriam $N - 1$ modos de Goldstone com propagador $\Delta(k) = 1/k^2$. A flutuação do parâmetro de ordem seria:

$$\langle (\delta\phi)^2 \rangle \sim \int \frac{d^d k}{k^2} \sim \int_0 \frac{k^{d-1} dk}{k^2} = \int_0 k^{d-3} dk,$$

que diverge no infravermelho para $d \leq 2$, contradizendo a existência de ordem de longo alcance.

Em $d = 2$, a transição de Berezinskii-Kosterlitz-Thouless (BKT) no modelo XY ($N = 2$) fornece uma transição topológica sem quebra de simetria — mediada por vórtices euclidianos.

6 Teoria de Campos a Temperatura Finita

6.1 O Formalismo de Tempo Imaginário

A conexão entre temperatura e tempo euclidiano emerge naturalmente. O operador densidade no ensemble canônico é:

$$\hat{\rho} = \frac{e^{-\beta\hat{H}}}{Z}, \quad Z = \text{Tr}(e^{-\beta\hat{H}}),$$

onde $\beta = 1/k_B T$. O operador $e^{-\beta H}$ é formalmente idêntico ao operador de evolução temporal euclidiano $e^{-H\tau}$ com $\tau = \beta$.

A função de partição é então:

$$Z = \text{Tr}(e^{-\beta H}) = \int \mathcal{D}\phi e^{-S_E[\phi]},$$

com a condição de contorno crucial:

$$\boxed{\phi(\tau + \beta, \vec{x}) = \pm \phi(\tau, \vec{x})}$$

onde $+$ para bósons (condições periódicas) e $-$ para férmions (condições antiperiódicas).

6.2 Compactificação Temporal e Topologia Cilíndrica

A temperatura finita corresponde geometricamente à **compactificação da direção temporal euclidiana** em um círculo de circunferência $\beta = 1/T$:

$$\mathbb{R}^4 \rightarrow S^1(\beta) \times \mathbb{R}^3.$$

O espaço-tempo euclidiano térmico é portanto $S^1 \times \mathbb{R}^3$ — um **cilindro** com seção transversal $\mathbb{R}^3$ e circunferência β na direção temporal. Esta geometria cilíndrica é a manifestação geométrica da temperatura: o “tamanho” da direção compacta codifica a temperatura do sistema.

Propriedades fundamentais da topologia cilíndrica:

- **Alta temperatura** ($T \rightarrow \infty$): $\beta \rightarrow 0$, o círculo encolhe e a teoria reduz-se efetivamente a $d - 1$ dimensões (redução dimensional). O espectro de Matsubara $\omega_n \sim nT$ cria um gap efetivo $\sim 2\pi T$ para modos $n \neq 0$.
- **Baixa temperatura** ($T \rightarrow 0$): $\beta \rightarrow \infty$, recupera-se $\mathbb{R}^4$ e a teoria de temperatura

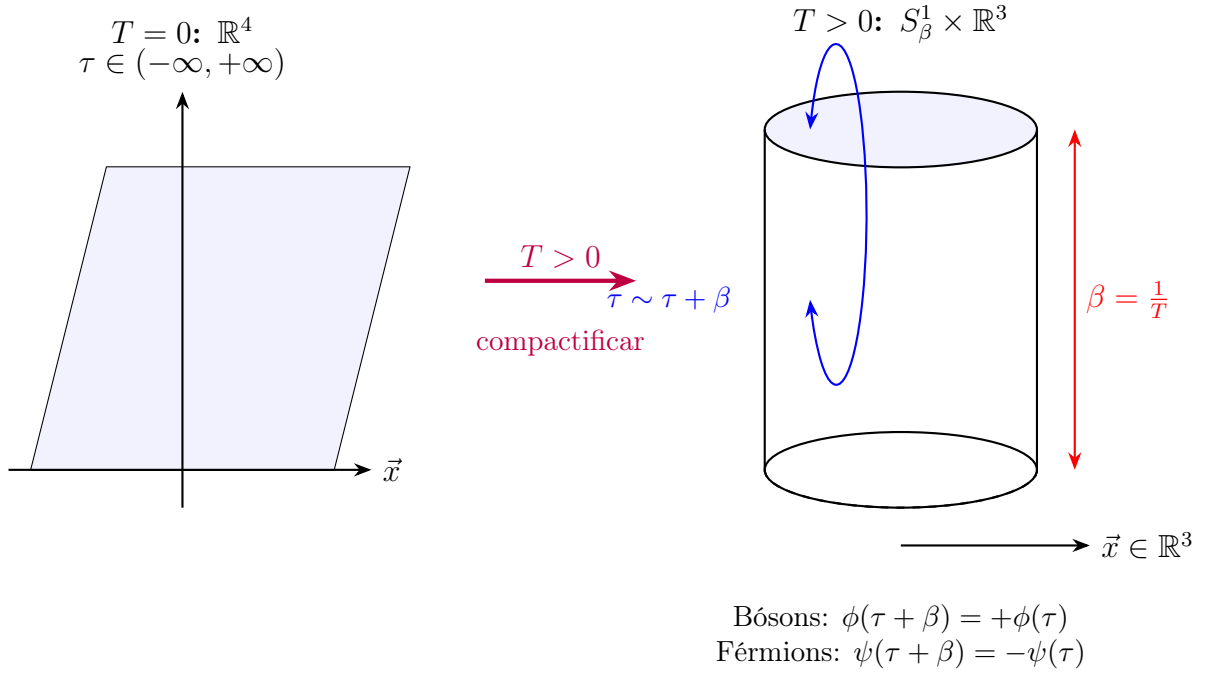


Figura 4: Topologia do espaço-tempo euclidiano: a temperatura zero, o espaço é $\mathbb{R}^4$ com tempo euclidiano ilimitado. A temperatura finita $T > 0$, a direção temporal é compactificada em um círculo S^1 de circunferência $\beta = 1/T$, produzindo a topologia cilíndrica $S^1_\beta \times \mathbb{R}^3$. A periodicidade impõe condições de contorno que distinguem bósons (periódicos) de férmions (antiperiódicos).

zero. O espectro de frequências torna-se contínuo.

- **Analogia com Kaluza-Klein:** A compactificação temporal é formalmente idêntica a uma dimensão extra compacta. Os modos de Matsubara $\omega_n = 2\pi nT$ são análogos à torre de Kaluza-Klein, com “massas” $m_n = 2\pi nT$.
- **Holonomia:** O loop de Wilson na direção compacta (loop de Polyakov) é uma observable topológica sensível ao enrolamento ao redor do cilindro — fundamental para a transição de desconfinamento.

6.3 Demonstração da Periodicidade Bosônica

A demonstração da condição de contorno periódica para bósons segue rigorosamente do traço na função de partição. Para um campo escalar:

$$Z = \text{Tr}(e^{-\beta H}) = \int d\phi_0 \langle \phi_0 | e^{-\beta H} | \phi_0 \rangle,$$

onde $|\phi_0\rangle$ é o autoestado do operador de campo $\hat{\phi}(\vec{x}, 0)$ com autovalor $\phi_0(\vec{x})$. A amplitude $\langle \phi_0 | e^{-\beta H} | \phi_0 \rangle$ é representada como integral de caminho sobre configurações que começam

e terminam em ϕ_0 :

$$\langle \phi_0 | e^{-\beta H} | \phi_0 \rangle = \int_{\phi(0)=\phi_0}^{\phi(\beta)=\phi_0} \mathcal{D}\phi e^{-S_E[\phi]}.$$

Isto é exatamente a condição $\phi(\beta, \vec{x}) = \phi(0, \vec{x})$ — periodicidade.

6.4 Demonstração da Antiperiodicidade Fermiônica

Para férmions, o traço sobre o espaço de Fock com estados de Grassmann requer:

$$\text{Tr}_F(\hat{O}) = \int d\bar{\eta} d\eta e^{-\bar{\eta}\eta} \langle -\eta | \hat{O} | \eta \rangle,$$

onde o sinal negativo em $\langle -\eta |$ vem da anticomutação dos operadores fermiônicos. Portanto:

$$Z_F = \int d\bar{\eta} d\eta e^{-\bar{\eta}\eta} \langle -\eta | e^{-\beta H} | \eta \rangle = \int_{\psi(\beta)=-\psi(0)} \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi e^{-S_E},$$

implicando $\psi(\beta, \vec{x}) = -\psi(0, \vec{x})$ — antiperiodicidade.

6.5 Emergência da Mecânica Estatística pela Rotação de Wick

A conexão entre teoria quântica e mecânica estatística via rotação de Wick é uma das revelações mais profundas da física teórica. Não se trata de uma mera analogia formal, mas de uma **identidade matemática exata** cuja origem geométrica é a topologia cilíndrica do espaço euclidiano térmico.

A cadeia lógica fundamental:

1. **Rotação de Wick:** $t \rightarrow -i\tau$ transforma o operador de evolução:

$$e^{-iHt} \rightarrow e^{-H\tau}.$$

2. **Traço = Periodicidade:** A função de partição $Z = \text{Tr}(e^{-\beta H})$ exige que o estado final coincida com o inicial, impondo periodicidade $\tau \sim \tau + \beta$.
3. **Compactificação:** A periodicidade transforma $\mathbb{R}^4 \rightarrow S^1_\beta \times \mathbb{R}^3$ — topologia cilíndrica.
4. **Discretização espectral:** A compactificação discretiza as frequências temporais: $\omega_n = 2\pi n/\beta$ (Matsubara).
5. **Estatística quântica:** As condições de contorno (periódicas/antiperiódicas) determinam se as partículas obedecem Bose-Einstein ou Fermi-Dirac.

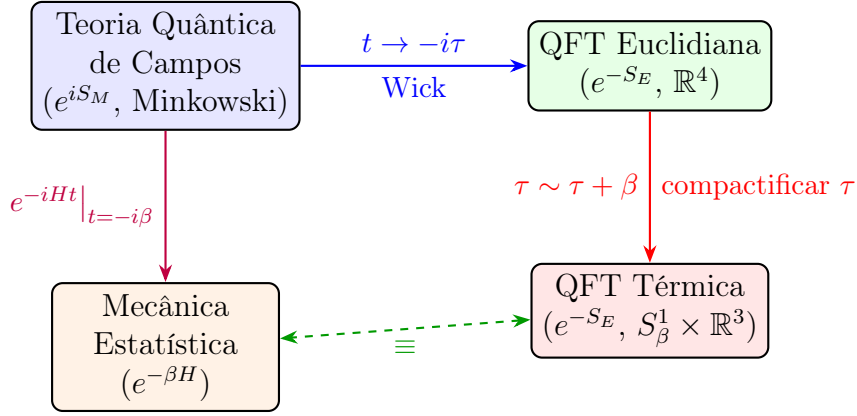


Figura 5: Diagrama mostrando como a mecânica estatística emerge da rotação de Wick. A QFT minkowskiana, após continuação analítica para tempo euclidiano e compactificação da direção temporal, torna-se matematicamente idêntica a um sistema de mecânica estatística. O circuito comuta: ir direto ($e^{-iHt}|_{t=-i\beta}$) ou via formulação euclidiana produz o mesmo resultado.

Por que a periodicidade implica temperatura:

O ponto crucial é que o operador $e^{-\beta H}$ tem duplo papel:

- Na mecânica quântica: é o operador de evolução temporal euclidiano por “tempo” β .
- Na mecânica estatística: é o operador de Boltzmann (peso canônico) a temperatura $T = 1/\beta$.

A operação de traço $\text{Tr}(e^{-\beta H})$ “fecha” a evolução temporal em um ciclo — geometricamente, cola os extremos $\tau = 0$ e $\tau = \beta$ do cilindro, gerando a topologia $S^1 \times \mathbb{R}^3$. A *mesma* operação matemática que define evolução temporal cíclica no espaço euclidiano é a definição de ensemble térmico.

Consequências profundas da topologia cilíndrica:

1. **Spin-estatística:** A distinção entre bósons (periodicidade) e férmions (antiperiodicidade) é uma consequência topológica do teorema de spin-estatística no espaço euclidiano compactificado.
2. **Temperatura como geometria:** A temperatura não é um parâmetro externo imposto — é o *inverso do perímetro* da dimensão compacta. Mudar a temperatura é mudar a geometria do espaço-tempo euclidiano.
3. **Transições de fase como mudanças topológicas:** Transições de desconfinamento podem ser entendidas como mudanças na estrutura topológica das configurações de gauge ao redor do ciclo S^1 .

4. **Radiação de Hawking:** A temperatura de buracos negros emerge da mesma lógica — a regularidade da geometria euclidiana no horizonte *fixa* o período, e portanto a temperatura (Seção de Gravitação Euclidiana).
5. **Efeito Unruh:** Um observador acelerado “vê” uma compactificação efetiva do espaço de Rindler euclidiano, emergindo uma temperatura proporcional à aceleração.

A função de partição como soma sobre geometrias:

No formalismo de integral de caminho, a conexão é:

$$Z(\beta) = \text{Tr}(e^{-\beta H}) = \int_{\phi(\beta)=\phi(0)} \mathcal{D}\phi e^{-S_E[\phi]} = \underbrace{\int_{\text{periódico}} \mathcal{D}\phi e^{-\int_0^\beta d\tau \int d^3x \mathcal{L}_E}}_{\text{integral sobre o cilindro } S_\beta^1 \times \mathbb{R}^3}$$

A geometria do cilindro determina completamente a termodinâmica:

- Energia livre: $F = -T \ln Z = -T \ln \int_{S_\beta^1 \times \mathbb{R}^3} \mathcal{D}\phi e^{-S_E}$.
- Entropia: $S = -\partial F / \partial T = \beta^2 \partial_\beta (\beta^{-1} \ln Z)$.
- Calor específico: $C_V = -\beta^2 \partial_\beta^2 \ln Z$ — flutuações de energia no ensemble.

6.6 Potencial Químico no Formalismo Euclidiano

O ensemble gran-canônico com potencial químico μ é obtido pela substituição:

$$H \rightarrow H - \mu N, \quad Z_{GC} = \text{Tr}(e^{-\beta(H-\mu N)}).$$

Na ação euclidiana, isto equivale a:

$$\partial_\tau \rightarrow \partial_\tau - \mu \quad (\text{para campos carregados}),$$

ou equivalentemente, a introdução de um campo de gauge temporal constante imaginário $A_4 = i\mu$. As frequências de Matsubara deslocam-se:

$$\omega_n \rightarrow \omega_n - i\mu \quad (\text{bósons}), \quad \tilde{\omega}_n \rightarrow \tilde{\omega}_n - i\mu \quad (\text{férmions}).$$

Problema do sinal: Para $\mu \neq 0$, a ação fermiônica em QCD torna-se complexa ($\det M(\mu) \notin \mathbb{R}$), e a medida e^{-S_E} deixa de ser positiva-definida. Isto impede simulações de Monte Carlo diretamente no regime de densidade finita — o célebre **problema do sinal em QCD a $\mu \neq 0$** , um dos grandes desafios abertos da física computacional.

6.7 Relação KMS (Kubo-Martin-Schwinger)

As funções de correlação térmicas satisfazem a condição **KMS**:

$$G^>(\tau) = G^<(\tau + \beta) \quad (\text{bósons}),$$

$$G^>(\tau) = -G^<(\tau + \beta) \quad (\text{férmions}),$$

onde $G^>(t) = \langle A(t)B(0) \rangle$ e $G^<(t) = \langle B(0)A(t) \rangle$. No tempo euclidiano, esta é simplesmente a condição de (anti)periodicidade do correlador.

A condição KMS é equivalente ao equilíbrio térmico e garante o teorema de flutuação-dissipação:

$$\text{Im } G^R(\omega) = \frac{1 \mp e^{-\beta\omega}}{2} \rho(\omega),$$

onde G^R é o correlador retardado e ρ a função espectral.

Parte IV

Formalismo de Matsubara

Estabelecida na Parte III a correspondência geométrica entre temperatura e compactificação temporal ($\mathbb{R}^4 \rightarrow S^1_\beta \times \mathbb{R}^3$), desenvolvemos agora o **formalismo de Matsubara** (1955) — o aparato técnico para cálculos perturbativos e não-perturbativos no espaço euclidiano térmico. A discretização das frequências temporais induzida pela topologia cilíndrica transforma integrais contínuas em somas discretas, com regras de Feynman modificadas que incorporam naturalmente os efeitos térmicos.

1 Frequências de Matsubara

1.1 Derivação via Condições de Contorno

Para um campo definido em $\tau \in [0, \beta]$ com condições periódicas (bósons) ou antiperiódicas (férmions), a expansão de Fourier na direção temporal é:

$$\phi(\tau, \vec{x}) = \frac{1}{\beta} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{\phi}(\omega_n, \vec{x}) e^{i\omega_n \tau},$$

onde as frequências de Matsubara são:

$$\omega_n = \begin{cases} \frac{2n\pi}{\beta} = 2n\pi T & \text{(bósons, condições periódicas)} \\ \frac{(2n+1)\pi}{\beta} = (2n+1)\pi T & \text{(férmions, condições antiperiódicas)} \end{cases}$$

com $n \in \mathbb{Z}$.

1.2 Justificativa Física

As condições de contorno periódicas (bósons) e antiperiódicas (férmions) seguem rigorosamente da operação de traço na função de partição, conforme demonstrado na Parte III (Seções sobre periodicidade bosônica e antiperiodicidade fermiônica). Em resumo:

- **Bósons:** $\text{Tr}(e^{-\beta H}) = \int d\phi \langle \phi | e^{-\beta H} | \phi \rangle$ exige $\phi(\beta) = \phi(0)$.
- **Férmions:** O traço sobre estados de Grassmann introduz um sinal $(-1)^F$, resultando em $\psi(\beta) = -\psi(0)$.

A distinção entre frequências pares (bósons) e ímpares (férmions) é uma consequência direta desta topologia: a expansão de Fourier sobre um círculo com condições periódicas produz harmônicos $e^{2\pi i n \tau / \beta}$, enquanto condições antiperiódicas produzem $e^{i(2n+1)\pi \tau / \beta}$.

2 Propagadores Térmicos

2.1 Propagador Bosônico

O propagador de Matsubara para um campo escalar livre é:

$$\Delta(\omega_n, \vec{k}) = \frac{1}{\omega_n^2 + \vec{k}^2 + m^2} = \frac{1}{(2n\pi T)^2 + \omega_k^2},$$

onde $\omega_k = \sqrt{\vec{k}^2 + m^2}$.

No espaço de posição temporal:

$$\Delta(\tau, \vec{k}) = \frac{1}{2\omega_k} \frac{\cosh[\omega_k(\beta/2 - |\tau|)]}{\sinh(\omega_k\beta/2)}, \quad 0 \leq |\tau| \leq \beta.$$

2.2 Propagador Fermiônico

Para férmions com frequências ímpares $\tilde{\omega}_n = (2n+1)\pi T$:

$$S(\tilde{\omega}_n, \vec{k}) = \frac{1}{i\tilde{\omega}_n \gamma_E^4 + \vec{\gamma}_E \cdot \vec{k} + m} = \frac{-i\tilde{\omega}_n \gamma_E^4 - \vec{\gamma}_E \cdot \vec{k} + m}{\tilde{\omega}_n^2 + \vec{k}^2 + m^2}.$$

2.3 Somas de Matsubara

A prescrição para cálculos a temperatura finita é substituir integrais sobre k_4 por somas:

$$\boxed{\int \frac{dk_4}{2\pi} f(k_4) \rightarrow T \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(\omega_n)}$$

Técnicas de avaliação de somas de Matsubara incluem:

1. Método de resíduos (truque do contorno):

$$T \sum_n f(\omega_n) = - \oint_C \frac{dz}{2\pi i} n_B(z) f(-iz),$$

onde $n_B(z) = 1/(e^{\beta z} - 1)$ é a distribuição de Bose-Einstein, e o contorno C envolve os polos de n_B em $z = i\omega_n$.

2. Soma fundamental bosônica:

$$T \sum_n \frac{1}{\omega_n^2 + E^2} = \frac{1}{2E} [1 + 2n_B(E)] = \frac{1}{2E} \coth\left(\frac{\beta E}{2}\right).$$

3. Soma fundamental fermiônica:

$$T \sum_n \frac{1}{\tilde{\omega}_n^2 + E^2} = \frac{1}{2E} [1 - 2n_F(E)] = \frac{1}{2E} \tanh\left(\frac{\beta E}{2}\right),$$

onde $n_F(E) = 1/(e^{\beta E} + 1)$ é a distribuição de Fermi-Dirac.

3 Aplicações do Formalismo de Matsubara

3.1 Energia Livre do Campo Escalar

A energia livre de um gás de bósons livres de massa m é:

$$F = -T \ln Z = \frac{V}{2} T \sum_n \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \ln(\omega_n^2 + \omega_k^2),$$

que, após regularização e subtração do vácuo ($T = 0$), dá:

$$F_T = V \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \left[\frac{\omega_k}{2} + T \ln(1 - e^{-\beta \omega_k}) \right].$$

No limite de alta temperatura ($T \gg m$), reproduz o resultado de Stefan-Boltzmann:

$$F_T \xrightarrow{T \gg m} -V \frac{\pi^2 T^4}{90}.$$

3.2 Correções Térmicas à Massa

Na teoria ϕ^4 a temperatura finita, o diagrama de tadpole contribui com uma correção de massa:

$$\delta m^2(T) = \frac{\lambda}{2} T \sum_n \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{1}{\omega_n^2 + \omega_k^2} = \frac{\lambda T^2}{24},$$

resultado que é exato em uma volta. A massa efetiva torna-se:

$$m_{\text{eff}}^2(T) = m^2 + \frac{\lambda T^2}{24}.$$

Esta correção térmica é fundamental para:

- Restauração de simetria a altas temperaturas (transições de fase).
- Blindagem de Debye em plasmas relativísticos.
- Bariogênese eletrofraca.

3.3 Redução Dimensional

A altas temperaturas ($T \gg m$), os modos com $n \neq 0$ (modos de Matsubara não-zero) adquirem massas efetivas $\sim 2\pi nT$ e podem ser integrados. A teoria efetiva resultante é **tridimensional**:

$$S_{\text{eff}}^{3d} = \int d^3 x \left[\frac{1}{2} (\nabla \phi_0)^2 + \frac{1}{2} m_{3d}^2 \phi_0^2 + \frac{\lambda_{3d}}{4!} \phi_0^4 \right],$$

onde ϕ_0 é o modo zero ($n = 0$) e os parâmetros m_{3d} , λ_{3d} incluem efeitos dos modos pesados. Esta redução dimensional é a base do programa de *dimensional reduction* em QCD a altas temperaturas.

4 Continuação Analítica: Matsubara $\rightarrow$ Tempo Real

4.1 O Problema da Continuação Analítica

Os correladores euclidianos de Matsubara $G(\omega_n)$ são definidos apenas em frequências discretas. Para obter funções de correlação retardadas (observáveis físicas como taxas de

transporte), é necessária a continuação analítica:

$$G^R(\omega) = G(i\omega_n \rightarrow \omega + i\eta), \quad \eta \rightarrow 0^+.$$

Este procedimento é formalmente simples, mas numericamente **mal-condicionado**: pequenas incertezas em $G(\omega_n)$ produzem grandes erros em $G^R(\omega)$ (problema inverso mal-posto).

4.2 Método de Entropia Máxima (MEM)

Para dados de lattice, a reconstrução da função espectral $\rho(\omega) = -\frac{1}{\pi} \text{Im } G^R(\omega)$ a partir do correlador euclidiano:

$$G(\tau) = \int_0^\infty d\omega K(\tau, \omega) \rho(\omega), \quad K(\tau, \omega) = \frac{\cosh[\omega(\beta/2 - \tau)]}{\sinh(\omega\beta/2)},$$

utiliza inferência bayesiana com prior de entropia máxima para regularizar a inversão.

4.3 Formalismo de Tempo Real (Schwinger-Keldysh)

Alternativa ao formalismo de Matsubara para sistemas fora do equilíbrio. O contorno temporal no plano complexo passa por:

$$C : \quad 0 \rightarrow t_{\max} \rightarrow 0 \rightarrow -i\beta \quad (\text{contorno de Keldysh}).$$

A comparação:

- **Matsubara (tempo imaginário):** ideal para *equilíbrio térmico*, termodinâmica, propriedades estáticas. Frequências discretas.
- **Schwinger-Keldysh (tempo real):** necessário para *fora do equilíbrio*, funções de resposta, transporte. Tempo real contínuo, mas matrizes 2×2 de propagadores.

5 Resomação de Hard Thermal Loops (HTL)

5.1 Motivação

Em teorias de gauge a temperatura finita, a teoria de perturbação ingênua falha para momentos moles ($k \sim gT$) pois os modos duros ($k \sim T$) geram auto-energias da ordem $\sim g^2 T^2$ que modificam qualitativamente a dinâmica infravermelha.

5.2 Auto-energia HTL

A auto-energia dos glúons no regime de hard thermal loops é:

$$\Pi^{00}(k) = m_D^2 \left[1 - \frac{k_0}{2|\vec{k}|} \ln \frac{k_0 + |\vec{k}|}{k_0 - |\vec{k}|} \right], \quad m_D^2 = \frac{g^2 T^2}{3} (N_c + N_f/2),$$

onde m_D é a massa de Debye (blindagem elétrica). Para o setor magnético:

$$\Pi_T^{ij}(k) = m_D^2 \frac{k_0^2}{|\vec{k}|^2} \left[1 - \frac{k_0^2 - |\vec{k}|^2}{2k_0|\vec{k}|} \ln \frac{k_0 + |\vec{k}|}{k_0 - |\vec{k}|} \right].$$

5.3 Ação Efetiva HTL

A ação efetiva HTL (Taylor-Wong, Braaten-Pisarski) é uma ação euclidiana não-local que resume todos os diagramas de um loop com momentos externos moles:

$$S_{\text{HTL}} = -m_D^2 \text{Tr} \int d^4 x_E \int \frac{d\Omega_{\hat{v}}}{4\pi} F_{\mu 4} \frac{\hat{v}^\mu \hat{v}^\nu}{(\hat{v} \cdot D)^2} F_{\nu 4},$$

onde $\hat{v}$ é um vetor unitário na esfera e a integração angular implementa a média sobre os modos duros.

A resomação HTL é necessária para:

- Obter a pressão de QCD corretamente até $\mathcal{O}(g^3)$.
- Calcular taxas de transporte (viscosidade, condutividade).
- Descrever o amortecimento de Landau em plasmas relativísticos.

Parte V

Função de Partição em Teoria de Campos

A função de partição é o objeto central que conecta a formulação euclidiana à termodinâmica e à mecânica estatística quântica. Através dela, obtêm-se todas as quantidades termodinâmicas e funções de correlação do sistema.

1 Função de Partição como Integral Funcional

1.1 Definição Geral

A função de partição de uma teoria de campos a temperatura $T = 1/\beta$ é:

$$Z(\beta) = \int_{\text{c.c.}} \mathcal{D}\phi e^{-S_E[\phi]}$$

onde “c.c.” denota condições de contorno apropriadas:

- Campos bosônicos: periódicos em τ com período β .
- Campos fermiônicos: antiperiódicos em τ com período β .

1.2 Potencial Termodinâmico

A energia livre de Helmholtz é:

$$F = -T \ln Z(\beta),$$

e todas as quantidades termodinâmicas seguem:

$$S = -\frac{\partial F}{\partial T} = \beta^2 \frac{\partial F}{\partial \beta} \quad (\text{entropia}), \quad (22)$$

$$E = F + TS = -\frac{\partial \ln Z}{\partial \beta} \quad (\text{energia interna}), \quad (23)$$

$$P = -\frac{\partial F}{\partial V} \quad (\text{pressão}), \quad (24)$$

$$C_V = -\beta^2 \frac{\partial^2 (\beta F)}{\partial \beta^2} \quad (\text{calor específico}). \quad (25)$$

1.3 Gás Ideal Bosônico

Para um campo escalar livre com massa m , a função de partição fatoriza no espaço de momentos:

$$\ln Z = -\frac{V}{\beta} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} \ln(\omega_n^2 + \omega_k^2).$$

Após regularização zeta ou subtração do vácuo:

$$\ln Z_T = -V \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \ln(1 - e^{-\beta \omega_k}).$$

A pressão resultante é:

$$P = T \frac{\ln Z}{V} = - \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} T \ln(1 - e^{-\beta \omega_k}).$$

No limite ultra-relativístico ($m = 0$):

$$P = \frac{\pi^2 T^4}{90}, \quad \rho = \frac{\pi^2 T^4}{30}, \quad s = \frac{2\pi^2 T^3}{45}.$$

1.4 Gás Ideal Fermiônico

Para férmions de Dirac livres com massa m :

$$\ln Z_F = V \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} 2 [\ln(1 + e^{-\beta(\omega_k - \mu)}) + \ln(1 + e^{-\beta(\omega_k + \mu)})],$$

onde o fator 2 conta spin, e μ é o potencial químico.

No limite $m = 0$, $\mu = 0$:

$$P_F = \frac{7}{8} \frac{\pi^2 T^4}{90},$$

ou seja, cada grau de liberdade fermiônico contribui 7/8 do valor bosônico.

2 Expansão Perturbativa a Temperatura Finita

2.1 Regras de Feynman Térmicas

As regras de Feynman na teoria de Matsubara são obtidas pelas substituições:

1. $\int \frac{dk_0}{2\pi} \rightarrow T \sum_n$ (soma sobre frequências de Matsubara).
2. Propagador: $\Delta(k) = 1/(\omega_n^2 + \vec{k}^2 + m^2)$.
3. Vértices: idênticos aos de temperatura zero.
4. Fator global: T para cada soma sobre frequências.

2.2 Pressão da QCD a Temperatura Finita

Para QCD com N_c cores e N_f sabores de quarks sem massa, a pressão perturbativa é:

$$\frac{P}{P_{\text{ideal}}} = 1 - \frac{15}{4\pi^2}\alpha_s - \frac{15}{4\pi^2} \left(\frac{135}{8} + \frac{15N_f}{4} - \frac{165}{8} \ln \frac{\bar{\mu}}{2\pi T} \right) \alpha_s^{3/2} + \mathcal{O}(\alpha_s^2),$$

onde $P_{\text{ideal}} = (N_c^2 - 1 + \frac{7N_c N_f}{2}) \frac{\pi^2 T^4}{90}$.

O termo $\alpha_s^{3/2}$ (não-analítico no acoplamento) é característico de teorias de gauge a temperatura finita e surge dos modos magnéticos infravermelhos — uma manifestação do **problema de Linde**: a teoria perturbativa em QCD quente falha na ordem g^6 devido a divergências infravermelas não-perturbativas dos modos magnéticos estáticos.

3 Transições de Fase

3.1 Potencial Efetivo Térmico

O potencial efetivo a temperatura finita para a teoria ϕ^4 com quebra espontânea é:

$$V_{\text{eff}}(\phi_c, T) = V_0(\phi_c) + V_1(\phi_c, T),$$

onde $V_0 = -\frac{\mu^2}{2}\phi_c^2 + \frac{\lambda}{4}\phi_c^4$ e a contribuição de um loop é:

$$V_1(\phi_c, T) = \frac{T^4}{2\pi^2} \int_0^\infty dx x^2 \ln \left(1 - e^{-\sqrt{x^2 + m^2(\phi_c)/T^2}} \right).$$

A altas temperaturas:

$$V_{\text{eff}} \approx \left(-\frac{\mu^2}{2} + \frac{\lambda T^2}{24} \right) \phi_c^2 + \frac{\lambda}{4} \phi_c^4.$$

A temperatura crítica de restauração de simetria é:

$$T_c = \sqrt{\frac{12\mu^2}{\lambda}} = \frac{2\sqrt{3}v}{\sqrt{1}},$$

onde $v = \mu/\sqrt{\lambda}$ é o valor esperado do vácuo a $T = 0$.

3.2 Transição de Fase Eletrofraca

No Modelo Padrão, a transição de fase eletrofraca ocorre a $T_c \sim 160$ GeV. A natureza desta transição (primeira ordem vs. crossover) depende da massa do Higgs:

- Para $m_H \lesssim 70$ GeV: transição de primeira ordem forte.
- Para $m_H \approx 125$ GeV (valor experimental): crossover suave (sem transição verdadeira).

Isto tem implicações profundas para a **bariogênese eletrofraca**: o mecanismo requer uma transição de primeira ordem forte, que não ocorre no Modelo Padrão com $m_H = 125$ GeV, motivando extensões como o MSSM ou modelos com Higgs adicional.

4 Diagrama de Fases da QCD

4.1 Loop de Polyakov como Parâmetro de Ordem

O **loop de Polyakov** é a holonomia do campo de gauge na direção temporal compactificada:

$$L(\vec{x}) = \frac{1}{N_c} \text{Tr} \mathcal{P} \exp \left(ig \int_0^\beta d\tau A_4(\tau, \vec{x}) \right),$$

onde $\mathcal{P}$ denota ordenação de caminho. Seu valor esperado é:

$$\langle L \rangle = e^{-\beta F_q},$$

onde F_q é a energia livre de um quark isolado.

Classificação:

- $\langle L \rangle = 0$: fase confinada ($F_q = \infty$, quarks não podem ser isolados).
- $\langle L \rangle \neq 0$: fase desconfiada ($F_q < \infty$, quarks são liberados).

4.2 Simetria de Centro $\mathbb{Z}_N$

A ação de Yang-Mills pura (sem quarks) na formulação euclidiana com condições periódicas possui uma simetria global $\mathbb{Z}_{N_c}$:

$$A_4 \rightarrow A_4 + \frac{2\pi k}{g\beta} \cdot \frac{1}{N_c}, \quad k = 0, 1, \dots, N_c - 1.$$

Sob esta transformação, $L \rightarrow e^{2\pi i k / N_c} L$. O loop de Polyakov é o parâmetro de ordem para a quebra espontânea de $\mathbb{Z}_{N_c}$:

- $T < T_c$: $\langle L \rangle = 0$ (simetria preservada, confinamento).
- $T > T_c$: $\langle L \rangle \neq 0$ (simetria quebrada, desconfinamento).

Para $SU(3)$ (QCD): $\mathbb{Z}_3 \rightarrow$ transição de primeira ordem (Yang-Mills puro). Com quarks dinâmicos, a simetria de centro é explicitamente quebrada e a transição torna-se crossover.

4.3 Diagrama de Fases no Plano (T, μ_B)

O diagrama de fases da QCD no plano temperatura-potencial bariquímico apresenta:

- **Crossover** ($\mu_B \approx 0$, $T \approx 155$ MeV): transição suave entre hádrons e plasma de quarks-glúons (QGP). Confirmado por lattice QCD.
- **Ponto crítico** ($\mu_B^{CEP} \sim 300\text{--}600$ MeV): fim da linha de crossover, transição de segunda ordem (classe de universalidade de Ising 3D). Procurado experimentalmente no RHIC-BES e CBM-FAIR.
- **Transição de primeira ordem** ($\mu_B > \mu_B^{CEP}$): coexistência de fases, latente calor.
- **Color superconductivity** ($T \sim 0$, μ_B alto): Emparelhamento de quarks tipo BCS, fase CFL ($\langle qq \rangle \neq 0$).

4.4 Condensado Quiral e Restauração de Simetria

O condensado quiral $\langle \bar{q}q \rangle$ é o parâmetro de ordem para a simetria quiral $SU(N_f)_L \times SU(N_f)_R$:

$$\langle \bar{q}q \rangle(T) = \frac{T}{V} \frac{\partial \ln Z}{\partial m_q}.$$

Na formulação euclidiana, via relação de Banks-Casher:

$$\langle \bar{q}q \rangle = -\pi \rho(0),$$

onde $\rho(\lambda)$ é a densidade espectral de autovalores do operador de Dirac euclidiano $\not{D}_E$. Restauração de simetria quiral ($\langle \bar{q}q \rangle \rightarrow 0$) ocorre quando se abre um gap no espectro em $\lambda = 0$.

Parte VI

Soluções Não-Perturbativas: Sólitons

Sólitons são soluções clássicas estáticas (ou estacionárias) das equações de movimento de uma teoria de campos, com energia finita e estabilidade topológica. No espaço euclidiano, eles aparecem como configurações que minimizam a ação em setores topológicos não-triviais. Sua existência revela fenômenos que são invisíveis à teoria de perturbação.

1 Sólitons Topológicos em 1+1 Dimensões

1.1 O Kink

Considere a teoria ϕ^4 com quebra espontânea de simetria em 1 + 1 dimensões:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)^2 - V(\phi), \quad V(\phi) = \frac{\lambda}{4}(\phi^2 - v^2)^2,$$

com mínimos em $\phi = \pm v$ (vácuos degenerados). A equação de campo estática é:

$$\frac{d^2 \phi}{dx^2} = V'(\phi) = \lambda \phi(\phi^2 - v^2).$$

O **kink** é a solução que interpola entre os dois vácuos:

$$\phi_{\text{kink}}(x) = v \tanh \left(\frac{x - x_0}{\sqrt{2} \xi} \right), \quad \xi = \frac{1}{m} = \frac{1}{v\sqrt{2\lambda}}$$

onde ξ é a largura do kink e x_0 é sua posição (parâmetro coletivo).

A energia (massa) do kink é:

$$M_{\text{kink}} = \int_{-\infty}^{\infty} dx \left[\frac{1}{2} \left(\frac{d\phi}{dx} \right)^2 + V(\phi) \right] = \frac{2\sqrt{2}}{3} \frac{m^3}{\lambda},$$

que é **não-perturbativa**: $M \propto 1/\lambda$, divergindo no limite de acoplamento fraco.

1.2 Carga Topológica e Estabilidade

A estabilidade do kink é garantida pela carga topológica:

$$Q = \frac{1}{2v} [\phi(+\infty) - \phi(-\infty)] = \pm 1.$$

Esta carga é conservada pois Q é um número inteiro que não pode mudar por deformações contínuas de energia finita. O espaço de configurações divide-se em setores topológicos disjuntos:

- $Q = 0$: setor do vácuo (perturbativo).
- $Q = +1$: setor do kink.
- $Q = -1$: setor do anti-kink.

A corrente topológica associada é:

$$j_{\text{top}}^{\mu} = \frac{1}{2v} \epsilon^{\mu\nu} \partial_{\nu} \phi, \quad \partial_{\mu} j_{\text{top}}^{\mu} = 0 \text{ (identicamente).}$$

1.3 Argumento de Bogomolny (BPS)

A energia pode ser escrita como:

$$E = \int dx \left[\frac{1}{2} \left(\frac{d\phi}{dx} \mp \sqrt{2V} \right)^2 \pm \frac{d\phi}{dx} \sqrt{2V} \right] \geq \left| \int dx \frac{d\phi}{dx} \sqrt{2V} \right|.$$

O limite BPS é saturado quando:

$$\frac{d\phi}{dx} = \pm \sqrt{2V(\phi)} \quad (\text{equação BPS de primeira ordem}).$$

Soluções que saturam o limite BPS são automaticamente soluções das equações de Euler-Lagrange de segunda ordem, e possuem energia mínima em seu setor topológico.

2 Vórtices em 2+1 Dimensões

2.1 Modelo de Higgs Abeliano

O modelo de Higgs abeliano em 2 + 1 dimensões é descrito por:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + |D_\mu\phi|^2 - \frac{\lambda}{4}(|\phi|^2 - v^2)^2,$$

com $D_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu$. Vórtices são soluções com enrolamento do campo ϕ no infinito espacial:

$$\phi(r, \theta) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} v e^{in\theta}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

O número de enrolamento $n = \frac{1}{2\pi} \oint d\theta \partial_\theta \arg(\phi)$ classifica a carga topológica (primeiro grupo de homotopia $\pi_1(U(1)) = \mathbb{Z}$).

2.2 Fluxo Magnético Quantizado

O fluxo magnético através do vórtice é quantizado:

$$\Phi = \int d^2x B = \frac{2\pi n}{e},$$

resultado puramente topológico. A energia por unidade de comprimento (tensão da string) no limite BPS ($\lambda = e^2$, ponto crítico entre tipo I e tipo II) é:

$$\mathcal{E} = \pi v^2 |n|.$$

3 Monopolos Magnéticos em 3+1 Dimensões

3.1 Monopolo de 't Hooft-Polyakov

Em uma teoria de gauge $SU(2)$ quebrada para $U(1)$ por um campo escalar adjunto ϕ^a :

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F^{\mu\nu a} + \frac{1}{2}(D_\mu\phi^a)(D^\mu\phi^a) - V(\phi),$$

com $V = \frac{\lambda}{4}(|\phi|^2 - v^2)^2$, existe uma solução de monopolo magnético com:

$$\phi^a \xrightarrow{r \rightarrow \infty} v \hat{r}^a, \quad B_i^a \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \frac{\hat{r}^a \hat{r}_i}{er^2}.$$

A carga magnética satisfaz a condição de quantização de Dirac:

$$g = \frac{4\pi}{e}n, \quad eg = 4\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

A massa do monopolo no limite BPS ($\lambda \rightarrow 0$) é:

$$M_{\text{monopolo}} = \frac{4\pi v}{e} = \frac{m_W}{\alpha_W},$$

onde $m_W = ev$ é a massa do bóson W e $\alpha_W = e^2/4\pi$.

3.2 Classificação Topológica

A existência de monopolos é garantida quando $\pi_2(G/H) \neq 0$, onde G é o grupo de gauge e H o subgrupo não-quebrado. Para $G = SU(2)$, $H = U(1)$: $\pi_2(SU(2)/U(1)) = \pi_2(S^2) = \mathbb{Z}$.

Em geral, sólitons topológicos são classificados pelos grupos de homotopia:

- Kinks: $\pi_0(\mathcal{M}_{\text{v\u00e1cuo}})$ (componentes conexas do v\u00e1cuo).
- V\u00f3rtices: $\pi_1(\mathcal{M}_{\text{v\u00e1cuo}})$ (la\u00e7os no v\u00e1cuo).
- Monopolos: $\pi_2(\mathcal{M}_{\text{v\u00e1cuo}})$ (esferas no v\u00e1cuo).
- Instantons: $\pi_3(G)$ (mapas $S^3 \rightarrow G$).
- Skyrmions: $\pi_3(SU(N_f))$ (mapas $S^3 \rightarrow$ grupo de sabor).

4 Skyrmions

4.1 O Modelo de Skyrme

Skyrmions s\u00e3o s\u00f3litons topol\u00f3gicos no modelo sigma n\u00e3o-linear quirais, identificados com b\u00e1rions. O campo \u00e9 $U(x) \in SU(N_f)$ e a a\u00e7\u00e3o euclidiana \u00e9:

$$S_E = \int d^4x_E \left[\frac{f_\pi^2}{4} \text{Tr}(\partial_\mu U^\dagger \partial_\mu U) + \frac{1}{32e^2} \text{Tr}([U^\dagger \partial_\mu U, U^\dagger \partial_\nu U]^2) \right].$$

O segundo termo (termo de Skyrme) \u00e9 necess\u00e1rio para a estabilidade (teorema de Derrick pro\u00edbe s\u00f3litons est\u00e1ticos em 3D com apenas o termo cin\u00e9tico).

4.2 Carga Bariônica Topológica

O número bariônico é a carga topológica:

$$B = \frac{1}{24\pi^2} \int d^3x \epsilon^{ijk} \text{Tr}(U^\dagger \partial_i U \cdot U^\dagger \partial_j U \cdot U^\dagger \partial_k U) \in \pi_3(SU(2)) = \mathbb{Z}.$$

O skyrmion com $B = 1$ é identificado com o próton/nêutron, com massa $M_{\text{skyrmion}} \approx 6\pi^2 f_\pi / e \sim 1 \text{ GeV}$.

5 Defeitos Topológicos Cosmológicos

5.1 Cordas Cósmicas

Quando uma simetria $U(1)$ é quebrada ($\pi_1(U(1)) = \mathbb{Z}$), formam-se cordas cósmicas — vórtices que se estendem ao longo de uma dimensão espacial. No espaço euclidiano, sua contribuição à função de partição é controlada pela tensão $\mu = \pi v^2$. A métrica ao redor de uma corda cósmica é cônica com déficit angular $\Delta\theta = 8\pi G\mu$.

5.2 Paredes de Domínio

Quando uma simetria discreta é quebrada ($\pi_0 \neq 0$), formam-se paredes de domínio — superfícies 2D interpolando entre vácuos distintos. Na teoria ϕ^4 com $\mathbb{Z}_2$, a parede é simplesmente o kink estendido a 3D com tensão superficial $\sigma = \frac{2\sqrt{2}}{3} \frac{m^3}{\lambda}$.

5.3 Texturas e Monopólos Cosmológicos

O mecanismo de Kibble (1976) prevê a formação de defeitos topológicos em transições de fase cosmológicas. A densidade de defeitos é controlada pelo comprimento de correlação ξ no momento da transição, calculável pela dinâmica euclidiana da teoria de campos.

6 Dualidade Sóliton-Partícula

6.1 Dualidade de Montonen-Olive

Em $\mathcal{N} = 4$ super-Yang-Mills, a dualidade forte-fraco troca:

- Partículas elementares (carga elétrica e) $\leftrightarrow$ monopolos magnéticos (carga $4\pi/e$).

- Bósons $W \leftrightarrow$ monopolos de 't Hooft-Polyakov.
- Acoplamento: $g \rightarrow 4\pi/g$.

Na formulação euclidiana, esta dualidade mapeia configurações perturbativas em sólitons e vice-versa, unificando os setores perturbativo e não-perturbativo da teoria.

Parte VII

Instantons

Instantons são soluções clássicas das equações de movimento euclidianas que são localizadas tanto no espaço quanto no tempo euclidiano. Representam processos de tunelamento quântico entre vácuos topologicamente inequivalentes e constituem o exemplo paradigmático de efeitos não-perturbativos em teoria de campos. Sua descoberta por Belavin, Polyakov, Schwartz e Tyupkin (BPST, 1975) revolucionou a compreensão da estrutura do vácuo em teorias de gauge.

1 Instantons em Mecânica Quântica

1.1 Duplo Poço de Potencial

Considere uma partícula em um potencial de duplo poço $V(x) = \frac{\lambda}{4}(x^2 - a^2)^2$. Na formulação euclidiana, a equação de movimento é:

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} = V'(x),$$

que equivale ao movimento em um potencial **invertido** $-V(x)$.

A solução de instanton conectando os dois mínimos $x = \pm a$ é:

$$x_{\text{inst}}(\tau) = a \tanh\left(\frac{\omega(\tau - \tau_0)}{2}\right), \quad \omega = a\sqrt{2\lambda},$$

com ação euclidiana:

$$S_0 = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \left[\frac{1}{2} \dot{x}^2 + V(x) \right] = \frac{2\omega^3}{3\lambda} = \frac{2\sqrt{2} a^3 \lambda^{1/2}}{3}.$$

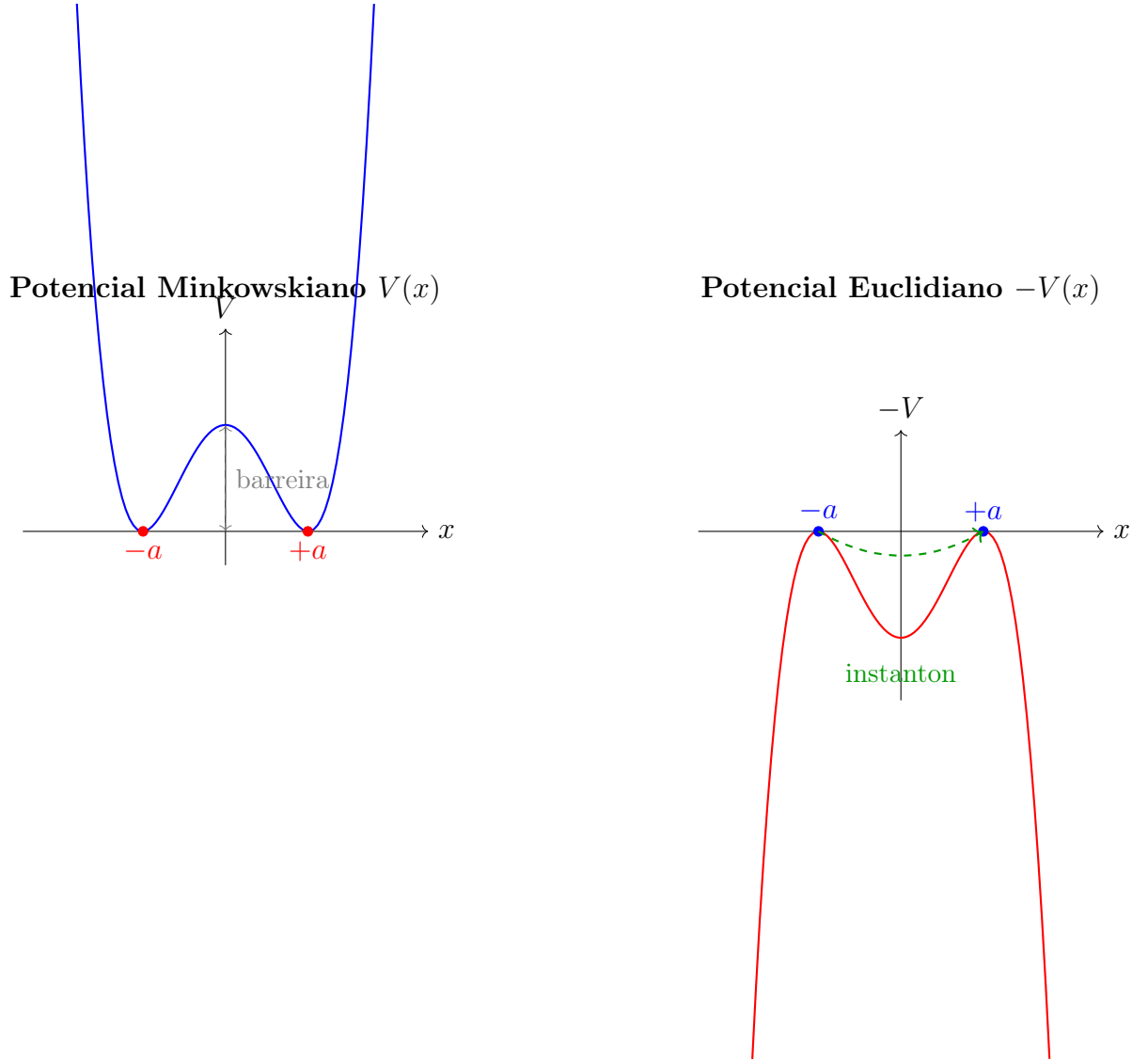


Figura 6: Esquerda: potencial de duplo poço $V(x) = \frac{\lambda}{4}(x^2 - a^2)^2$ com barreira clássica entre os mínimos $\pm a$. Direita: na formulação euclidiana, a equação de movimento corresponde ao potencial *invertido* $-V(x)$, onde a “partícula” pode rolar classicamente de $-a$ até $+a$ — esta trajetória é o instanton, descrevendo o tunelamento quântico.

1.2 Tunelamento e Desdobramento de Energia

A amplitude de tunelamento entre os estados $|-a\rangle$ e $|+a\rangle$ é dominada pela contribuição do instanton:

$$\langle +a | e^{-HT} | -a \rangle \sim K e^{-S_0} \quad (T \rightarrow \infty),$$

onde K inclui flutuações quânticas (determinante funcional). O desdobramento de energia resultante é:

$$\Delta E = E_1 - E_0 \propto e^{-S_0},$$

exponencialmente pequeno — invisível a qualquer ordem da teoria de perturbação.

A aproximação do gás diluído de instantons dá:

$$\Delta E = 2\hbar\omega \left(\frac{S_0}{2\pi\hbar} \right)^{1/2} e^{-S_0/\hbar}.$$

2 Instantons de Yang-Mills (BPST)

2.1 Configurações Auto-duais

No espaço euclidiano $\mathbb{R}^4$, define-se o dual de Hodge do tensor de campo:

$$\tilde{F}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}F_{\rho\sigma}.$$

A ação de Yang-Mills pode ser decomposta como:

$$S_E = \frac{1}{4} \int d^4x F_{\mu\nu}^a F_{\mu\nu}^a = \frac{1}{8} \int d^4x \left[(F \mp \tilde{F})^2 \pm 2F\tilde{F} \right].$$

Como $(F \mp \tilde{F})^2 \geq 0$, obtemos o **limite de Bogomolny**:

$$S_E \geq \frac{1}{4} \left| \int d^4x F_{\mu\nu}^a \tilde{F}_{\mu\nu}^a \right| = \frac{8\pi^2}{g^2} |Q|$$

onde Q é a carga topológica (número de Pontryagin):

$$Q = \frac{g^2}{32\pi^2} \int d^4x F_{\mu\nu}^a \tilde{F}_{\mu\nu}^a \in \mathbb{Z}.$$

O limite é saturado para configurações **auto-duais** (instantons) ou **anti-auto-duais** (anti-instantons):

$$F_{\mu\nu} = \pm \tilde{F}_{\mu\nu}.$$

2.2 Solução BPST Explícita

Para $SU(2)$ com $Q = 1$, a solução de instanton no gauge singular é:

$$A_\mu^a(x) = \frac{2}{g} \frac{\eta_{\mu\nu}^a (x - x_0)_\nu}{(x - x_0)^2 + \rho^2},$$

onde $\eta_{\mu\nu}^a$ são os símbolos de 't Hooft (que combinam as matrizes de Pauli com a estrutura euclidiana) e ρ é o tamanho do instanton.

No gauge regular:

$$A_\mu^a(x) = \frac{2}{g} \frac{\bar{\eta}_{\mu\nu}^a (x - x_0)_\nu}{(x - x_0)^2 + \rho^2} \cdot \frac{(x - x_0)^2}{(x - x_0)^2 + \rho^2}.$$

Os símbolos de 't Hooft $\eta_{\mu\nu}^a$ e $\bar{\eta}_{\mu\nu}^a$ satisfazem:

$$\eta_{\mu\nu}^a = \epsilon^{a\mu\nu 4} + \delta^{a\mu} \delta^{\nu 4} - \delta^{a\nu} \delta^{\mu 4}, \quad (26)$$

$$\bar{\eta}_{\mu\nu}^a = \epsilon^{a\mu\nu 4} - \delta^{a\mu} \delta^{\nu 4} + \delta^{a\nu} \delta^{\mu 4}. \quad (27)$$

2.3 Parâmetros do Instanton (Espaço de Módulos)

O instanton BPST com $Q = 1$ em $SU(2)$ possui 8 parâmetros (módulos):

- x_0^μ : 4 parâmetros de posição (centro do instanton).
- ρ : 1 parâmetro de escala (tamanho).
- 3 orientações no grupo $SU(2)$ (rotações de gauge globais).

Para $SU(N)$ com carga Q , o espaço de módulos tem dimensão $4NQ$.

A ação do instanton é independente de todos os módulos:

$$S_{\text{instanton}} = \frac{8\pi^2}{g^2} |Q|.$$

3 Estrutura do Vácuo: o Vácuo θ

3.1 Vácuos Topológicos

Em teoria de gauge pura $SU(N)$, existem infinitos vácuos topológicos $|n\rangle$ ($n \in \mathbb{Z}$), classificados pelo número de enrolamento (winding number) da transformação de gauge no infinito espacial: $\pi_3(SU(N)) = \mathbb{Z}$.

Os instantons mediam transições entre esses vácuos:

$$\langle n + Q | e^{-HT} | n \rangle \propto e^{-8\pi^2 |Q|/g^2}.$$

3.2 O Estado θ -vácuo

O verdadeiro vácuo da teoria   uma superposição de Bloch:

$$|\theta\rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-in\theta} |n\rangle$$

onde $\theta \in [0, 2\pi)$   um parâmetro livre da teoria (análogo ao quasi-momento em um cristal).

A ação efetiva no vácuo θ inclui o **termo topológico**:

$$S_{\text{eff}} = S_{YM} + i\theta Q = \int d^4x \left[\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{\mu\nu a} + \theta \frac{g^2}{32\pi^2} F_{\mu\nu}^a \tilde{F}^{\mu\nu a} \right].$$

3.3 O Problema CP Forte

O termo θ viola CP (conjug  o de carga + paridade). Em QCD, isto induziria um momento de dipolo elétrico do nêutron:

$$d_n \approx 3.6 \times 10^{-16} \theta \, e \cdot \text{cm}.$$

O limite experimental $|d_n| < 1.8 \times 10^{-26} \, e \cdot \text{cm}$ implica:

$$|\theta_{\text{eff}}| < 10^{-10}.$$

Por que θ   tão pequeno? Este é o **problema CP forte**, uma das questões abertas mais importantes da física de partículas. Soluções propostas incluem:

- **Mecanismo de Peccei-Quinn:** Uma simetria $U(1)_{PQ}$ adicional torna θ dinâmico. Sua quebra espontânea produz o ** xion**, um pseudoscalar leve que relaxa $\theta_{\text{eff}} \rightarrow 0$.
- **Massa nula do quark up:** Se $m_u = 0$, o parâmetro θ seria fisicamente irrelevante (rot vel por uma transformação quir l).
- **Solução de Nelson-Barr:** CP   uma simetria exata quebrada espontaneamente, com θ naturalmente pequeno.

4 Determinante Funcional e Flutuações

4.1 Aproximação Semiclássica

A contribuição de um setor de instanton único à função de partição é:

$$Z_{Q=1} \approx \int d^4x_0 \int \frac{d\rho}{\rho^5} C(\rho) e^{-8\pi^2/g^2},$$

onde a integração é sobre os módulos e $C(\rho)$ inclui o determinante funcional das flutuações quânticas ao redor do instanton.

O cálculo de 't Hooft (1976) fornece, para $SU(2)$:

$$C(\rho) = \frac{2^6}{\pi^2} \left(\frac{8\pi^2}{g^2} \right)^4 e^{-\alpha_1 (\mu\rho)^{b_0}},$$

onde $b_0 = 11N_c/3 - 2N_f/3$ é o coeficiente da função beta (liberdade assintótica) e μ é a escala de renormalização.

4.2 Problema da Escala e Gás de Instantons

A integração sobre ρ apresenta uma divergência infravermelha para $\rho \rightarrow \infty$ (instantons grandes). Isto indica que o tratamento semiclássico diluído falha e efeitos coletivos (interações entre instantons) tornam-se importantes.

O modelo do **líquido de instantons** (Shuryak, Diakonov-Petrov) trata o ensemble de instantons com:

- Densidade: $n \approx 1 \text{ fm}^{-4}$.
- Tamanho médio: $\bar{\rho} \approx 1/3 \text{ fm}$.
- Fator de empacotamento: $n\bar{\rho}^4 \approx 0.01$ (diluído).

Este modelo reproduz com sucesso:

- Quebra espontânea da simetria quirial.
- Condensado de quarks $\langle \bar{q}q \rangle$.
- Massa do méson η' (resolução do problema $U(1)_A$).

5 Calorons: Instantons a Temperatura Finita

5.1 Definição

Calorons são soluções auto-duais ($F = \tilde{F}$) da teoria de Yang-Mills euclidiana no espaço $S^1(\beta) \times \mathbb{R}^3$ (temperatura finita). São instantons com periodicidade na direção temporal compactificada.

5.2 Caloron de Harrington-Shepard

Para $SU(2)$ com loop de Polyakov trivial no infinito ($L_\infty = 1$), o caloron de Harrington-Shepard (1978) é:

$$A_\mu^{HS} = A_\mu^{\text{BPST}} \Big|_{\text{periódico}} = \frac{2}{g} \eta_{\mu\nu}^a \partial_\nu \ln \phi_{HS},$$

com $\phi_{HS} = 1 + \frac{\pi\rho^2}{\beta r} \frac{\sinh(2\pi r/\beta)}{\cosh(2\pi r/\beta) - \cos(2\pi\tau/\beta)}$.

No limite $\rho \ll \beta$: reduz-se ao instanton BPST usual. No limite $\rho \gg \beta$: estende-se sobre toda a extensão temporal.

5.3 Calorons de Kraan-van Baal-Lee-Lu (KvBLL)

Para loop de Polyakov não-trivial $L_\infty \neq \pm 1$, os calorons se dissociam em **monopolos constituintes** (1998). Para $SU(N)$ com N autovalores distintos do loop de Polyakov:

- Cada caloron com $Q = 1$ consiste de N monopolos de tipo BPS.
- As massas dos monopolos são proporcionais às diferenças dos autovalores de L_∞ .
- Quando o loop de Polyakov é confinante ($L_\infty = 0$), os monopolos têm massas iguais.

5.4 Confinamento via Calorons

O mecanismo proposto para confinamento via calorons:

1. A altas temperaturas: calorons são “moléculas” de monopolos ligados.
2. Na transição de desconfinamento: calorons se dissociam em monopolos constituintes livres.
3. A baixas temperaturas: o condensado de monopolos gera confinamento dual (mecanismo de 't Hooft).

6 Instantons Fracionários e Resurgência

6.1 Instantons Fracionários

Em teorias com compactificação (como $\mathbb{R}^3 \times S^1$ com condições periódicas twisted), podem existir soluções com ação **fracionária**:

$$S = \frac{8\pi^2}{g^2 N} \quad (\text{instanton fracionário em } SU(N) \text{ em } \mathbb{R}^3 \times S^1),$$

ou seja, $1/N$ da ação do instanton completo. Estes objetos (bions, monopole-instantons) são controláveis semiclassicamente quando $L = \beta\Lambda_{QCD} \ll 1$.

6.2 Resurgência e Teoria Transseriada

A teoria de resurgência (Écalle) conecta:

- Divergência da série perturbativa (renormalons).
- Contribuições não-perturbativas (instantons, bions).
- Ambiguidades imaginárias de Borel $\sim e^{-cS_0}$.

A **trans-série** completa:

$$F(g) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n g^{2n} + \sigma_1 e^{-S_0/g^2} \sum_{n=0}^{\infty} b_n g^{2n} + \sigma_1^2 e^{-2S_0/g^2} \sum_{n=0}^{\infty} c_n g^{2n} + \dots$$

é auto-consistente: as ambiguidades da ressonância de Borel da série perturbativa são canceladas exatamente pelas contribuições de instantons, garantindo que observáveis físicos são reais e não-ambíguos.

Parte VIII

Aplicações Avançadas e Tópicos Modernos

A formulação euclidiana não é apenas um truque de cálculo — ela é a base de desenvolvimentos modernos que vão desde simulações numéricas (lattice QCD) até resultados exatos em teorias supersimétricas, passando por conexões profundas com topologia e geometria diferencial.

1 Teoria de Campos na Rede (Lattice QFT)

1.1 Discretização Euclidiana

A formulação euclidiana é essencial para simulações numéricas de Monte Carlo. O espaço-tempo contínuo é substituído por uma rede hipercúbica com espaçamento a :

$$x_\mu = n_\mu a, \quad n_\mu \in \mathbb{Z}, \quad \mu = 1, 2, 3, 4.$$

Para campos escalares, a ação euclidiana discretizada é:

$$S_E^{\text{lat}} = a^4 \sum_n \left[\sum_\mu \frac{(\phi_{n+\hat{\mu}} - \phi_n)^2}{2a^2} + \frac{m^2}{2} \phi_n^2 + \frac{\lambda}{4!} \phi_n^4 \right].$$

1.2 Ação de Wilson para Gauge

Para campos de gauge, Wilson (1974) introduziu as variáveis de link:

$$U_\mu(n) = \exp(igaA_\mu(n + \hat{\mu}/2)) \in SU(N),$$

e a ação de plaqueta:

$$S_W = \beta \sum_{\text{plaq}} \left(1 - \frac{1}{N} \text{Re Tr } U_{\mu\nu}(n) \right)$$

onde $U_{\mu\nu} = U_\mu(n)U_\nu(n + \hat{\mu})U_\mu^\dagger(n + \hat{\nu})U_\nu^\dagger(n)$ é a plaqueta e $\beta = 2N/g^2$.

No limite contínuo $a \rightarrow 0$:

$$S_W \rightarrow \frac{1}{4} \int d^4x F_{\mu\nu}^a F_{\mu\nu}^a + \mathcal{O}(a^2).$$

1.3 Férmions na Rede

A discretização de férmions na rede apresenta o **problema dos dobradores** (doubblers): a ação ingênua produz 2^d férmions em vez de um (teorema de Nielsen-Ninomiya).

Soluções:

- **Férmions de Wilson:** Adiciona um termo que dá massa $\sim 1/a$ aos dobradores, quebrando a simetria quirial.
- **Férmions staggered (Kogut-Susskind):** Distribui os componentes do spinor pelos sítios da rede, reduzindo (mas não eliminando) os dobradores.
- **Férmions de domínio (Kaplan):** Usa uma dimensão extra com uma parede de domínio; férmions quirais vivem na parede.
- **Férmions overlap (Neuberger):** Satisfaz exatamente a relação de Ginsparg-Wilson $\{\gamma_5, D\} = aD\gamma_5D$, preservando uma simetria quirial modificada.

1.4 Monte Carlo e Importância Sampling

A positividade de e^{-S_E} permite usar métodos de Monte Carlo:

$$\langle \mathcal{O} \rangle = \frac{\int \mathcal{D}U \mathcal{O}[U] e^{-S_W[U]}}{\int \mathcal{D}U e^{-S_W[U]}} \approx \frac{1}{N_{\text{conf}}} \sum_{i=1}^{N_{\text{conf}}} \mathcal{O}[U_i],$$

onde $\{U_i\}$ são configurações geradas com peso $\propto e^{-S_W}$ (importance sampling via algoritmos como Metropolis ou Hybrid Monte Carlo).

Resultados notáveis de lattice QCD:

- Espectro de hádrons com precisão de $\sim 1\%$.
- Confinamento de quarks (potencial linear $V(r) \sim \sigma r$).

- Transição de desconfinamento a $T_c \approx 155$ MeV.
- Elementos de matriz CKM.
- Constante de decaimento do pión f_π .

2 Anomalias e o Teorema de Índice de Atiyah-Singer

2.1 Anomalia Quiral e Instantons

Na presença de um instanton com carga Q , o operador de Dirac possui modos zero quirais. O **teorema do índice de Atiyah-Singer** garante:

$$\boxed{\text{ind}(\not{D}) = n_+ - n_- = Q}$$

onde $n_\pm$ é o número de modos zero de quiralidade $\pm$. Este resultado topológico conecta:

- A anomalia quiral $\partial_\mu j_5^\mu = \frac{g^2 N_f}{16\pi^2} F \tilde{F}$.
- A violação do número fermiônico por instantons (processo de 't Hooft).
- A massa do η' (resolução do problema $U(1)_A$).

2.2 Interação de 't Hooft

Na presença de um instanton em QCD com N_f sabores, 't Hooft mostrou que surge uma interação efetiva de $2N_f$ férmions:

$$\mathcal{L}_{\text{'t Hooft}} \propto e^{-8\pi^2/g^2} \det_{ij}(\bar{q}_{Ri} q_{Lj}) + \text{h.c.},$$

que viola a simetria $U(1)_A$ (explicando $m_{\eta'} \gg m_\pi$) mas preserva $SU(N_f)_L \times SU(N_f)_R$.

Para $N_f = 2$:

$$\mathcal{L}_{\text{'t Hooft}} \propto (\bar{u}_R u_L)(\bar{d}_R d_L) - (\bar{u}_R d_L)(\bar{d}_R u_L),$$

uma interação de quatro férmions que contribui para a quebra espontânea da simetria quiral.

3 Teoria de Campos Euclidiana e Supersimetria

3.1 Localização

Em teorias supersimétricas, a integral funcional euclidiana pode ser calculada **exatamente** pelo método de localização: a integral reduz-se a uma integral sobre o espaço de módulos dos pontos fixos da supersimetria.

O prepotencial de Seiberg-Witten para $\mathcal{N} = 2$ $SU(2)$ foi derivado usando estas técnicas, e a função de partição de Nekrasov fornece a expressão exata:

$$Z_{\text{Nek}}(\epsilon_1, \epsilon_2, a) = Z_{\text{pert}} \cdot Z_{\text{inst}},$$

onde $Z_{\text{inst}} = \sum_{k=0}^{\infty} q^k Z_k$ é uma soma sobre setores de instanton.

3.2 Instantons e Dualidade

A dualidade elétrico-magnética de Montonen-Olive em $\mathcal{N} = 4$ super-Yang-Mills troca:

$$\tau = \frac{\theta}{2\pi} + \frac{4\pi i}{g^2} \rightarrow -\frac{1}{\tau},$$

trocando acoplamento forte e fraco, e monopolos com cargas elétricas. A ação do instanton $S = 8\pi^2/g^2$ transforma-se em $S' = 8\pi^2 g^2/(4\pi)^2$, mapeando efeitos não-perturbativos em perturbativos e vice-versa.

4 Condensação de Bose-Einstein via QFT Euclidiana

4.1 Formulação

Para um gás de bósons com potencial químico μ , a ação euclidiana com rotação $U(1)$ é:

$$S_E = \int_0^\beta d\tau \int d^3x \left[\phi^* (\partial_\tau - \mu) \phi + \frac{1}{2m} |\nabla \phi|^2 + \frac{g}{2} |\phi|^4 \right].$$

A condensação ocorre quando $\mu \rightarrow m$ (limite não-relativístico) e $\langle \phi \rangle \neq 0$, quebrando espontaneamente a simetria $U(1)$ global. A densidade do condensado é:

$$n_0 = |\langle \phi \rangle|^2 = \frac{\mu}{g}.$$

4.2 Modo de Goldstone e Superfluidiez

A quebra de $U(1)$ produz um modo de Goldstone (o fônon) com relação de dispersão linear:

$$\omega = c_s |\vec{k}|, \quad c_s = \sqrt{\frac{n_0 g}{m}} \quad (\text{velocidade do som}).$$

Na formulação euclidiana, o modo de Goldstone manifesta-se como a direção de curvatura zero no potencial efetivo, e a superfluidiez é descrita pela rigidez de fase (phase stiffness) do campo de ordem.

5 Grupo de Renormalização Funcional (FRG)

5.1 Equação de Wetterhaus (Exact RG)

O grupo de renormalização funcional é uma formulação não-perturbativa do RG baseada na ação efetiva média $\Gamma_k[\phi]$ — uma interpolação entre a ação clássica ($k = \Lambda$) e a ação efetiva completa ($k = 0$):

$$\partial_k \Gamma_k[\phi] = \frac{1}{2} \text{Tr} \left[\frac{\partial_k R_k}{\Gamma_k^{(2)}[\phi] + R_k} \right]$$

onde $R_k(q^2)$ é um regulador infravermelho que suprime modos com $|q| < k$, e $\Gamma_k^{(2)} = \delta^2 \Gamma_k / \delta \phi \delta \phi$ é a segunda derivada funcional.

5.2 Propriedades

- Equação **exata** (não-perturbativa) — equivalente à integral funcional completa.
- Estrutura de um loop (o traço é sobre momentos e índices internos).
- O regulador R_k implementa a integração de Wilson shell-por-shell no espaço de momentos euclidiano.
- Requer trunicações para ser resolvida na prática (expansão em derivadas, expansão do potencial).

5.3 Aplicações

O FRG euclidiano tem sido aplicado com sucesso a:

- QCD a temperatura finita: localização do ponto crítico.
- Gravitação quântica assintoticamente segura (asymptotic safety de Weinberg-Reuter).
- Física de matéria condensada: transição BKT, superfluidez.
- Expoentes críticos com precisão competitiva ao bootstrap conforme.

6 Formalismo Worldline Euclidiano

6.1 Representação de Tempo Próprio

O formalismo worldline (Strassler, Schubert) reformula loops quânticos como integrais sobre trajetórias de partículas no espaço euclidiano. A ação efetiva de um loop escalar em background de gauge é:

$$\Gamma^{(1)} = -\frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{dT}{T} e^{-m^2 T} \oint_{x(T)=x(0)} \mathcal{D}x(\tau) e^{-\int_0^T d\tau \left[\frac{\dot{x}^2}{4} + ig\dot{x} \cdot A(x) \right]},$$

onde T é o tempo próprio e a integral de caminho é sobre loops fechados no espaço euclidiano 4D.

6.2 Produção de Pares de Schwinger

A taxa de produção de pares e^+e^- por campo elétrico constante E é calculada pelo instanton worldline — um loop circular no plano (τ, x) euclidiano:

$$\Gamma_{\text{Schwinger}} = \frac{(eE)^2}{8\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \exp\left(-\frac{n\pi m^2}{eE}\right).$$

O instanton circular tem raio $R = m/(eE)$ e ação $S_n = n\pi m^2/(eE)$ — a supressão exponencial reflete o tunelamento através da barreira de energia $2m$. A interpretação geométrica deste instanton como efeito análogo a Hawking/Unruh é desenvolvida na Parte X (Seção sobre Outros Efeitos da Rotação de Wick).

7 Machine Learning e QFT Euclidiana na Rede

7.1 Redes Neurais para Geração de Configurações

A positividade de e^{-S_E} permite usar técnicas de machine learning generativo para amostrar configurações de gauge na rede:

- **Normalizing flows:** Transformações invertíveis que mapeiam uma distribuição simples (gaussiana) na distribuição de Boltzmann $\propto e^{-S_E}$. Eliminam autocorrelações e critical slowing down.
- **Redes equivariantes:** Arquiteturas que respeitam simetrias de gauge por construção.

7.2 Problemas do Sinal e Deformação de Contorno

Para QCD a $\mu \neq 0$, onde e^{-S_E} é complexo, métodos de **deformação de contorno** (thimbles de Lefschetz) no espaço de campos complexificado podem restaurar a positividade efetiva. A ideia: deformar a integração de $\mathbb{R}^N$ para uma variedade $\mathcal{M} \subset \mathbb{C}^N$ onde $\text{Im}(S_E)$ é constante (thimble).

Parte IX

Decaimento do Falso Vácuo e Bounces Euclidianos

O decaimento do falso vácuo é um fenômeno intrinsecamente não-perturbativo onde um estado metaestável transiciona para o verdadeiro vácuo via tunelamento quântico. Na formulação euclidiana, este processo é descrito por soluções de ponto de sela chamadas **bounces**, cuja ação determina a taxa de decaimento.

1 O Bounce de Coleman

1.1 Configuração do Problema

Considere um campo escalar com potencial $V(\phi)$ possuindo um mínimo local (falso vácuo) em ϕ_+ e um mínimo global (verdadeiro vácuo) em ϕ_- , com $V(\phi_+) > V(\phi_-)$.

A taxa de decaimento por unidade de volume é (Coleman, 1977):

$$\boxed{\frac{\Gamma}{V} = A e^{-B/\hbar} [1 + \mathcal{O}(\hbar)]}$$

onde $B = S_E[\phi_b] - S_E[\phi_+]$ é a diferença de ação euclidiana entre o bounce ϕ_b e o falso vácuo, e A é um prefator determinado por flutuações quânticas.

1.2 Equação do Bounce

O bounce é uma solução $O(4)$ -simétrica das equações de campo euclidianas. Com o ansatz $\phi = \phi(r)$ onde $r = |x_E| = \sqrt{\tau^2 + \vec{x}^2}$:

$$\frac{d^2\phi}{dr^2} + \frac{3}{r} \frac{d\phi}{dr} = \frac{dV}{d\phi},$$

com condições de contorno:

$$\left. \frac{d\phi}{dr} \right|_{r=0} = 0, \quad \phi(r \rightarrow \infty) = \phi_+.$$

A equação é análoga ao movimento de uma “partícula” em potencial $-V(\phi)$ com “atrito” dependente do tempo $3/r$ — o bounce corresponde à partícula que parte de algum ϕ_0 em $r = 0$ e chega a ϕ_+ em $r = \infty$.

1.3 Teorema de Coleman

Teorema: O bounce com menor ação (dominante) possui simetria $O(4)$: $\phi = \phi(|x_E|)$.

Demonstração (esboço): Qualquer solução ϕ pode ser rearranjada em uma solução $O(4)$ -simétrica ϕ^* com $S_E[\phi^*] \leq S_E[\phi]$ (rearranjo simétrico de Steiner), análogo à prova de que a esfera minimiza a área para volume dado.

1.4 Aproximação de Parede Fina (Thin-Wall)

Quando $\epsilon = V(\phi_+) - V(\phi_-) \ll$ barreira de potencial, o bounce tem a forma de uma “bolha” com raio R grande e parede fina:

$$\phi_b(r) \approx \begin{cases} \phi_- & r < R \\ \text{transição rápida} & r \approx R \\ \phi_+ & r > R \end{cases}$$

A ação do bounce é:

$$B = S_E[\phi_b] - S_E[\phi_+] = 2\pi^2 R^3 \sigma - \frac{\pi^2}{2} R^4 \epsilon,$$

onde $\sigma = \int_{\phi_-}^{\phi_+} d\phi \sqrt{2(V - V_+)}$ é a tensão superficial da parede. Minimizando em R :

$$R = \frac{3\sigma}{\epsilon}, \quad B = \frac{27\pi^2\sigma^4}{2\epsilon^3}.$$

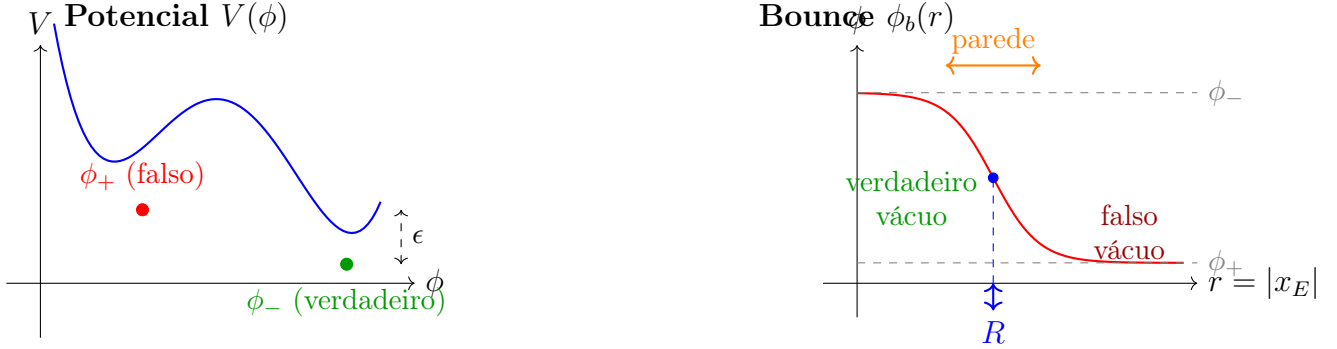


Figura 7: Esquerda: potencial $V(\phi)$ com falso vácuo ϕ_+ (metaestável) e verdadeiro vácuo ϕ_- (mínimo global), separados por energia ϵ . Direita: perfil radial do bounce euclidiano $\phi_b(r)$. O bounce interpola entre o verdadeiro vácuo no interior ($r < R$) e o falso vácuo no exterior ($r > R$), com transição concentrada em uma “parede” de espessura $\sim \xi$ ao redor de $r = R$.

1.5 Interpretação Física

O bounce euclidiano descreve a nucleação de uma bolha de verdadeiro vácuo dentro do falso vácuo:

- A seção em $\tau = 0$ do bounce dá a configuração no momento da nucleação.
- A evolução subsequente (continuando para tempo real) descreve a expansão da bolha.
- A bolha nucleia com raio R e expande acelerando até $v \rightarrow c$.

1.6 Prefator e Modo Negativo

O prefator A envolve:

$$A = \left(\frac{B}{2\pi} \right)^2 \left| \frac{\det'(-\partial^2 + V''(\phi_b))}{\det(-\partial^2 + V''(\phi_+))} \right|^{-1/2},$$

onde $\det'$ omite os 4 modos zero (translações) e o modo negativo (dilatação). O modo negativo produz o fator i que gera a parte imaginária da energia — a taxa de decaimento.

2 Bounce Gravitacional (Coleman-De Luccia)

2.1 Ação com Gravidade

Quando a gravidade é incluída, a ação euclidiana relevante é:

$$S_E = -\frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{g} (R - 2\Lambda) + \int d^4x \sqrt{g} \left[\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi + V(\phi) \right] + S_{\text{GHY}},$$

onde S_{GHY} é o termo de fronteira de Gibbons-Hawking-York.

O bounce gravitacional existe quando:

$$B_{CDL} = B_{\text{Coleman}} \cdot \left(1 - \frac{R^2}{4\ell_{dS}^2} \right)^{-1},$$

onde $\ell_{dS} = \sqrt{3/\Lambda}$ é o raio de de Sitter. Para $R \rightarrow 2\ell_{dS}$, a ação diverge e o decaimento é suprimido — o falso vácuo de Sitter pode ser absolutamente estável gravitacionalmente.

2.2 Aplicações Cosmológicas

- **Paisagem de cordas:** O multiverso eterno via nucleação de bolhas de Coleman-De Luccia entre vácuos da paisagem.
- **Estabilidade do vácuo eletrofraco:** Com $m_H = 125$ GeV e $m_t = 173$ GeV, o potencial do Higgs pode desenvolver um segundo mínimo a $\phi \sim 10^{10}$ GeV. O tempo de vida do vácuo eletrofraco excede a idade do universo: $\tau \sim 10^{600}$ anos.
- **Inflação eterna:** Transições entre vácuos de energia cosmológica diferente nucleiam bolhas cujos interiores são universos abertos (Coleman-De Luccia).

Parte X

Gravitação Euclidiana e Termodinâmica de Buracos Negros

A formulação euclidiana da gravitação revela conexões profundas entre geometria, termodinâmica e teoria quântica. A temperatura de Hawking, a entropia de Bekenstein-Hawking e transições de fase gravitacionais emergem naturalmente da análise de soluções euclidianas da relatividade geral. Nesta parte, demonstramos como o **efeito Unruh** (temperatura da aceleração), o **efeito Hawking** (temperatura de buracos negros) e o **efeito Gibbons-Hawking** (temperatura cosmológica) são todas manifestações do mesmo mecanismo geométrico: a exigência de regularidade euclidiana no horizonte impõe periodicidade temporal e, portanto, uma temperatura.

1 Ação Gravitacional Euclidiana

1.1 Ação de Einstein-Hilbert Euclidiana

Após rotação de Wick, a ação gravitacional com termo de fronteira é:

$$S_E^{\text{grav}} = -\frac{1}{16\pi G} \int_{\mathcal{M}} d^4x \sqrt{g} (R - 2\Lambda) - \frac{1}{8\pi G} \oint_{\partial\mathcal{M}} d^3x \sqrt{h} K,$$

onde K é a curvatura extrínseca da fronteira e h a métrica induzida. O termo de fronteira (Gibbons-Hawking-York) é necessário para um problema variacional bem-posto.

Nota sobre sinal: Em gravitação euclidiana, a ação não é limitada inferiormente (o modo conforme $g_{\mu\nu} \rightarrow e^{2\omega} g_{\mu\nu}$ pode fazer $S_E \rightarrow -\infty$). Isto é o **problema do fator conforme** — a integral funcional $\int \mathcal{D}g e^{-S_E}$ é formalmente divergente. Tratamentos incluem: rotação do contorno conforme (Gibbons-Hawking-Perry) ou restringir a integral

a geometrias com curvatura positiva.

2 Temperatura de Hawking pela Periodicidade Euclidiana

2.1 Método de Gibbons-Hawking

A métrica de Schwarzschild em coordenadas euclidianas ($t = -i\tau$):

$$ds_E^2 = \left(1 - \frac{2GM}{r}\right) d\tau^2 + \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2.$$

Próximo ao horizonte $r = 2GM + \epsilon$ (com $\epsilon \rightarrow 0$), expandindo:

$$ds_E^2 \approx \frac{\epsilon}{2GM} d\tau^2 + \frac{2GM}{\epsilon} d\epsilon^2 + (2GM)^2 d\Omega^2.$$

Com a mudança $\rho = 2\sqrt{2GM\epsilon}$:

$$ds_E^2 \approx \frac{\rho^2}{(4GM)^2} d\tau^2 + d\rho^2 + (2GM)^2 d\Omega^2.$$

A parte (ρ, τ) é plana em coordenadas polares se e somente se τ tem período:

$$\boxed{\beta = 8\pi GM \quad \Rightarrow \quad T_H = \frac{1}{\beta} = \frac{1}{8\pi GM} = \frac{\hbar c^3}{8\pi GM k_B}}$$

Caso contrário, há uma singularidade cônica em $\rho = 0$ (horizonte), tornando a geometria singular. A **regularidade da geometria euclidiana exige** a periodicidade $\beta = 1/T_H$ — a temperatura de Hawking emerge puramente da geometria.

2.2 Generalização

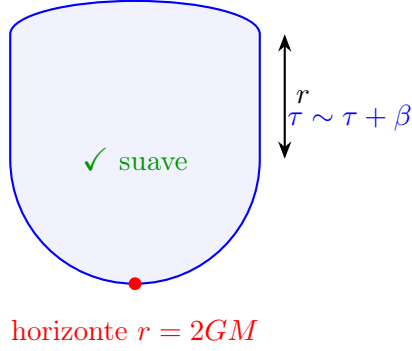
Para um buraco negro genérico com gravidade superficial κ no horizonte:

$$T_H = \frac{\kappa}{2\pi}, \quad \kappa = \lim_{r \rightarrow r_+} \frac{1}{2} \frac{d}{dr} (g_{tt}) \cdot \frac{1}{\sqrt{g_{rr}}}.$$

Exemplos:

- Schwarzschild: $T_H = 1/(8\pi GM)$.

Período correto: $\beta = 8\pi GM$



Período incorreto: $\beta \neq 8\pi GM$

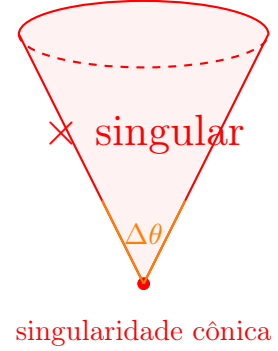


Figura 8: Geometria euclidiana de Schwarzschild. Esquerda: com o período correto $\beta = 8\pi GM$, a geometria é suave no horizonte (topologia de “cigarro” $\mathbb{R}^2 \times S^2$). Direita: com período incorreto, surge uma singularidade cônica no horizonte — um defeito angular $\Delta\theta \neq 0$ que corresponde a uma distribuição de curvatura singular (corda cósmica). A exigência de regularidade fixa univocamente a temperatura $T_H = 1/(8\pi GM)$.

- Reissner-Nordström: $T_H = (r_+ - r_-)/(4\pi r_+^2)$.
- Kerr: $T_H = (r_+ - r_-)/(4\pi(r_+^2 + a^2))$.
- Schwarzschild-AdS: $T_H = (3r_+^2/\ell^2 + 1)/(4\pi r_+)$.

3 Efeito Unruh: Temperatura da Aceleração

O efeito Unruh (1976) demonstra que um observador uniformemente acelerado no vácuo de Minkowski percebe um banho térmico de partículas. Na formulação euclidiana, este efeito emerge naturalmente da geometria do **espaço de Rindler** após rotação de Wick — revelando uma profunda unificação entre aceleração, horizonte e temperatura.

3.1 Espaço de Rindler e o Horizonte de Aceleração

Um observador com aceleração própria constante a em Minkowski segue a trajetória hiperbólica:

$$x(\tau_p) = \frac{1}{a} \cosh(a\tau_p), \quad t(\tau_p) = \frac{1}{a} \sinh(a\tau_p),$$

onde τ_p é o tempo próprio. A região do espaço-tempo acessível a este observador (cunha de Rindler direita, $x > |t|$) é parametrizada pelas coordenadas de Rindler (η, ξ) :

$$t = \xi \sinh(a\eta), \quad x = \xi \cosh(a\eta),$$

com métrica:

$$ds^2 = a^2 \xi^2 d\eta^2 - d\xi^2 - dy^2 - dz^2.$$

O horizonte de Rindler $\xi = 0$ ($x = |t|$) é uma superfície nula que limita a região causal do observador acelerado — ele nunca pode receber sinais de $x < |t|$.

3.2 Rotação de Wick no Espaço de Rindler

Aplicando a rotação de Wick $\eta \rightarrow -i\theta$ (onde η é o “tempo” de Rindler):

$$ds_E^2 = a^2 \xi^2 d\theta^2 + d\xi^2 + dy^2 + dz^2.$$

A parte (ξ, θ) é um espaço plano em **coordenadas polares**:

$$ds_E^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\theta^2 + dy^2 + dz^2, \quad \rho = a\xi.$$

A regularidade em $\rho = 0$ (o horizonte euclidiano) exige que θ seja periódico com período 2π :

$$\theta \sim \theta + 2\pi.$$

Mas θ é o tempo euclidiano de Rindler, relacionado ao tempo euclidiano de Minkowski por $\tau_{\text{Mink}} = \xi \cdot a\theta$. Para o observador em $\xi = 1/a$, o período de seu tempo próprio euclidiano é:

$$\beta = \frac{2\pi}{a}.$$

Portanto, a **temperatura de Unruh** é:

$$T_U = \frac{a}{2\pi} = \frac{\hbar a}{2\pi c k_B}$$

3.3 Interpretação Física do Efeito Unruh

O efeito Unruh tem múltiplas interpretações complementares:

1. Via periodicidade euclidiana: O vácuo de Minkowski $|0_M\rangle$, quando restrito à cunha de Rindler e traçado sobre a cunha complementar, produz um estado térmico com temperatura $T_U = a/(2\pi)$. Geometricamente, a periodicidade do tempo euclidiano de Rindler é a causa.

2. Via transformação de Bogoliubov: Os modos positivos e negativos de Min-

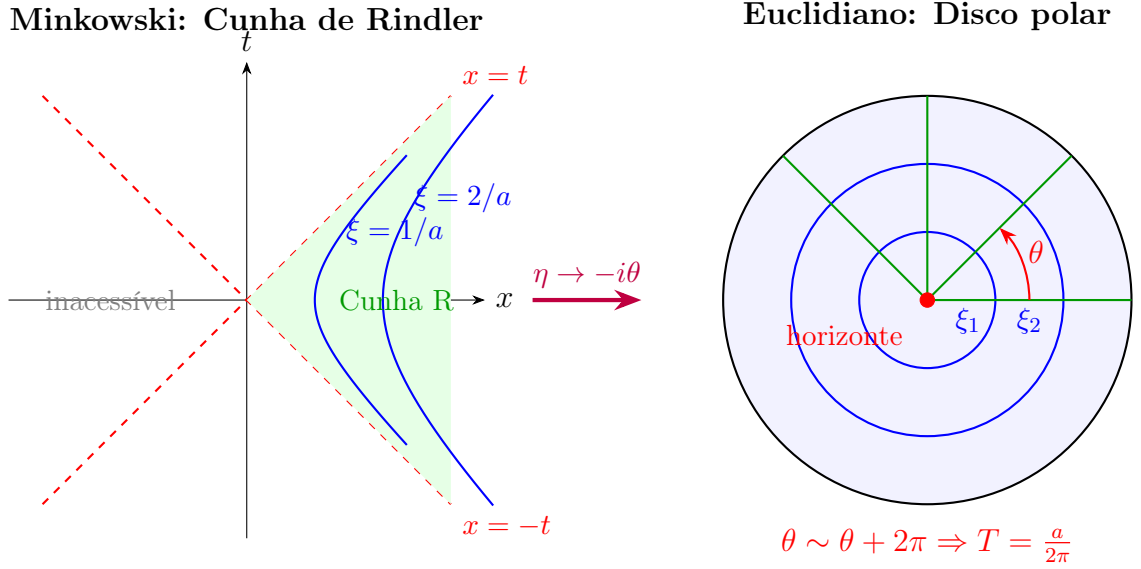


Figura 9: Esquerda: cunha de Rindler no espaço de Minkowski — a região $x > |t|$ acessível ao observador acelerado, com horizonte nas linhas $x = \pm t$. Direita: após rotação de Wick, a cunha torna-se o plano euclidiano em coordenadas polares (ρ, θ) . A regularidade na origem ($\rho = 0$, horizonte) exige periodicidade $\theta \sim \theta + 2\pi$, implicando temperatura $T_U = a/(2\pi)$.

kowski misturam-se ao serem expressos em termos dos modos de Rindler, com coeficientes de Bogoliubov que produzem um espectro planckiano:

$$\langle 0_M | N_\omega^{\text{Rindler}} | 0_M \rangle = \frac{1}{e^{2\pi\omega/a} - 1} = \frac{1}{e^{\omega/T_U} - 1}.$$

3. Via estado termofield double: O vácuo de Minkowski pode ser escrito como um estado emaranhado entre as cunhas esquerda (L) e direita (R):

$$|0_M\rangle = \frac{1}{\sqrt{Z}} \sum_n e^{-\beta E_n/2} |n\rangle_L \otimes |n\rangle_R,$$

onde $\beta = 2\pi/a$. Traçar sobre L produz o estado térmico em R — o emaranhamento entre regiões causalmente desconectadas manifesta-se como temperatura.

3.4 Valores Numéricos e Observabilidade

Para acelerações acessíveis em laboratório, o efeito é extremamente pequeno:

$$T_U = \frac{\hbar a}{2\pi c k_B} \approx 4 \times 10^{-23} \text{ K} \cdot \left(\frac{a}{1 \text{ m/s}^2} \right).$$

Uma temperatura de 1 K requer $a \approx 2.5 \times 10^{20} \text{ m/s}^2$. Propostas experimentais

incluem:

- Elétrons ultrarelativísticos em aceleradores (efeito sobre spin/polarização).
- Análogos em condensados de Bose-Einstein e circuitos supercondutores.
- Radiação de espelhos acelerados (efeito Casimir dinâmico).

3.5 Unificação: Unruh, Hawking e Gibbons-Hawking

Os três efeitos compartilham a mesma estrutura euclidiana — a exigência de regularidade no horizonte fixa a periodicidade e portanto a temperatura:

Efeito	Horizonte	Gravidade superficial	Temperatura
Unruh	Rindler ($x = t $)	$\kappa = a$	$T = a/(2\pi)$
Hawking	Schwarzschild ($r = 2GM$)	$\kappa = 1/(4GM)$	$T = 1/(8\pi GM)$
Gibbons-Hawking	de Sitter ($r = \ell$)	$\kappa = 1/\ell$	$T = 1/(2\pi\ell)$
Kerr	Rotante ($r = r_+$)	$\kappa = \frac{r_+ - r_-}{2(r_+^2 + a^2)}$	$T = \kappa/(2\pi)$

Tabela 3: Unificação dos efeitos térmicos via periodicidade euclidiana. Em todos os casos, a temperatura é $T = \kappa/(2\pi)$, onde κ é a gravidade superficial do horizonte correspondente.

4 Efeito Gibbons-Hawking: Temperatura do Espaço de Sitter

4.1 Espaço de Sitter Euclidiano

O espaço de Sitter (constante cosmológica positiva $\Lambda > 0$) possui um horizonte cosmológico a distância $\ell = \sqrt{3/\Lambda}$. A métrica estática de de Sitter:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r^2}{\ell^2}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{r^2}{\ell^2}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\Omega^2,$$

após rotação de Wick $t \rightarrow -i\tau$, apresenta a mesma estrutura que Schwarzschild próximo ao horizonte. A regularidade em $r = \ell$ exige:

$$\tau \sim \tau + 2\pi\ell \quad \Rightarrow \quad T_{GH} = \frac{1}{2\pi\ell} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\Lambda}{3}}.$$

A geometria euclidiana de de Sitter é uma **4-esfera** S^4 de raio ℓ — uma variedade compacta e suave. Isto contrasta com Schwarzschild euclidiano (não-compacto, $\mathbb{R}^2 \times S^2$).

4.2 Implicações Cosmológicas

A temperatura de Gibbons-Hawking implica que um observador em expansão de Sitter (inflação, energia escura) percebe um banho térmico isotrópico. Com o valor atual da constante cosmológica:

$$T_{GH}^{\text{atual}} \approx 2.4 \times 10^{-30} \text{ K},$$

completamente inobservável, mas conceitualmente fundamental para a termodinâmica do horizonte cosmológico e o problema da entropia de de Sitter:

$$S_{dS} = \frac{A_{\text{horizonte}}}{4G} = \frac{3\pi}{\Lambda G} \approx 10^{122}.$$

5 Outros Efeitos Físicos da Rotação de Wick

5.1 Efeito Schwinger como Instanton Euclidiano

A produção de pares elétron-pósitron por um campo elétrico forte (efeito Schwinger, 1951) é um efeito de tunelamento descrito por um instanton no espaço euclidiano. O “worldline instanton” é um **loop circular** no plano euclidiano (τ, x) :

$$\tau(\sigma) = R \sin \sigma, \quad x(\sigma) = R \cos \sigma, \quad R = \frac{m}{eE}.$$

A ação euclidiana deste loop circular é:

$$S_E = \pi R^2 \cdot eE = \frac{\pi m^2}{eE},$$

e a taxa de produção de pares é:

$$\Gamma \propto e^{-S_E} = \exp \left(-\frac{\pi m^2}{eE} \right).$$

A interpretação geométrica é elegante: no campo elétrico, o gap de energia $2m$ corresponde a uma “barreira” que a partícula virtual deve tunelar. No espaço euclidiano, o tunelamento é uma trajetória clássica — o círculo de raio $R = m/(eE)$. O campo elétrico “encolhe” o instanton, tornando o tunelamento mais provável.

5.2 Efeito Casimir Dinâmico e Espelhos Acelerados

Um espelho perfeitamente refletor em aceleração não-uniforme emite fótons (efeito Casimir dinâmico). Na formulação euclidiana:

- A trajetória do espelho define uma fronteira no espaço euclidiano.
- As condições de contorno modificam o espectro do operador $(-\Delta + m^2)$.
- A diferença entre determinantes funcionais (com e sem espelho) produz a taxa de emissão.
- Para aceleração uniforme, o espectro emitido é térmico com $T = a/(2\pi)$ — consistente com Unruh.

O espelho acelerado é um “análogo” do buraco negro em 1+1 dimensões: um espelho que começa em repouso e acelera até a velocidade da luz simula a formação de um buraco negro, com o fluxo de radiação emitida reproduzindo exatamente a radiação de Hawking (modelo de Davies-Fulling).

5.3 Termalização Topológica e Efeito de Casimir Topológico

Quando dimensões espaciais são compactificadas (não apenas a temporal), surgem efeitos térmicos análogos:

Efeito de Casimir topológico: Um campo quântico em $\mathbb{R}^{d-1} \times S_L^1$ (uma dimensão compacta de comprimento L) sofre uma contribuição à energia de vácuo análoga ao efeito Casimir:

$$\mathcal{E}_{\text{Casimir}} = -\frac{\pi^2}{1440L^4} \quad (d=4, \text{ escalar sem massa}).$$

A correspondência é exata: trocar $L \leftrightarrow \beta$ intercambia efeito Casimir e termodinâmica. Ambos são manifestações da topologia não-trivial do espaço euclidiano.

5.4 Radiação de Hawking pela Anomalia de Traço

Christensen e Fulling (1977) derivaram a radiação de Hawking usando exclusivamente a anomalia de traço conforme na formulação euclidiana. O tensor energia-momento de um campo conforme em 2D tem traço anômalo:

$$\langle T^\mu_\mu \rangle = \frac{c}{24\pi} R,$$

onde c é a carga central e R a curvatura escalar. Na geometria euclidiana de um buraco negro 2D, a curvatura integrada sobre o “cap” (região próxima ao horizonte) produz exatamente o fluxo de Hawking:

$$\langle T_{tt} \rangle_{\infty} = \frac{\pi c}{12\beta^2} = \frac{\pi c T_H^2}{12}.$$

Esta derivação é puramente geométrica: a radiação de Hawking é uma consequência inevitável da curvatura do espaço euclidiano (anomalia conforme) e da topologia do horizonte.

5.5 Nucleação de Pares em Campos Gravitacionais

Análogo ao efeito Schwinger, campos gravitacionais intensos podem nuclear pares de partículas. Na formulação euclidiana:

- **Nucleação de buracos negros:** Um campo magnético/elétrico forte pode nuclear pares de buracos negros carregados. O instanton euclidiano correspondente é a métrica de Ernst (par de buracos negros acelerados).
- **Nucleação de branas:** Em teoria de cordas, campos de forma podem nuclear branas (processo mediado por instantons gravitacionais).
- **Bounce de Brown-Teitelboim:** A constante cosmológica pode “decair” via nucleação de membranas carregadas, com taxa $\Gamma \propto e^{-S_E[\text{membrana}]}$.

A taxa de nucleação em todos estes casos é controlada pela ação euclidiana do instanton correspondente — a supressão exponencial e^{-S_E} garante a estabilidade aproximada dos estados metaestáveis.

6 Entropia de Bekenstein-Hawking

6.1 Derivação via Ação On-Shell

A ação euclidiana avaliada na solução de Schwarzschild (com período β) fornece a energia livre:

$$F = T \cdot S_E^{\text{on-shell}} = \frac{M}{2},$$

(após subtração do background plano — regularização de Gibbons-Hawking).

A entropia é:

$$S = \beta^2 \frac{\partial F}{\partial \beta} = \beta M - S_E^{\text{on-shell}} = 4\pi G M^2 = \frac{A}{4G},$$

onde $A = 16\pi G^2 M^2$ é a área do horizonte. Esta é a **fórmula de Bekenstein-Hawking**:

$$\boxed{S_{BH} = \frac{A}{4G} = \frac{k_B c^3 A}{4G\hbar}}$$

6.2 Contribuição Topológica

A ação euclidiana de Schwarzschild recebe contribuição do termo de Euler topológico:

$$\chi(\mathcal{M}) = \frac{1}{32\pi^2} \int d^4x \sqrt{g} (R_{\mu\nu\rho\sigma}^2 - 4R_{\mu\nu}^2 + R^2) = 2,$$

para a instanton gravitacional de Schwarzschild (topologia $\mathbb{R}^2 \times S^2$). A entropia $S = A/4G$ é proporcional a esta contribuição topológica de fronteira.

7 Transição de Fase de Hawking-Page

7.1 Schwarzschild-AdS Euclidiano

Em espaço-tempo anti-de Sitter (AdS), existem duas geometrias euclidianas com a mesma temperatura:

- AdS térmico (gás de radiação em AdS, sem horizonte).
- Buraco negro de Schwarzschild-AdS (com horizonte).

A diferença de ação é:

$$\Delta S_E = S_E^{\text{BN-AdS}} - S_E^{\text{AdS térmico}} = \frac{\beta r_+}{4G} \left(1 - \frac{r_+^2}{\ell^2} \right).$$

7.2 Transição de Primeira Ordem

Para $r_+ < \ell$ ($T < T_c$): $\Delta S_E > 0$, AdS térmico domina. Para $r_+ > \ell$ ($T > T_c$): $\Delta S_E < 0$, buraco negro domina. A temperatura crítica:

$$T_{HP} = \frac{1}{\pi\ell}.$$

Esta é uma **transição de fase de primeira ordem** entre gás de gravitons e buraco negro. Via AdS/CFT, corresponde à transição de desconfinamento na teoria de gauge dual (Witten, 1998).

8 Instantons Gravitacionais

Soluções euclidianas completas (regulares, compactas ou assintoticamente planas) da gravidade:

- **Schwarzschild euclidiano** ($\mathbb{R}^2 \times S^2$): “cigarro” com tip suave no horizonte.
- **Métrica de Eguchi-Hanson** (ALE): resolução de $\mathbb{R}^4/\mathbb{Z}_2$.
- **K3**: variedade compacta hiper-Kähler (instanton gravitacional compacto).
- **Taub-NUT e Taub-bolt**: espaços assintoticamente localmente planos com carga NUT.

Parte XI

Anomalias e o Método de Fujikawa

As anomalias quânticas — a violação de simetrias clássicas pela quantização — encontram sua derivação mais elegante e transparente na formulação euclidiana através do **método de Fujikawa** (1979). A transformação não-trivial da medida funcional sob simetrias quirais é a origem física das anomalias.

1 Derivação da Anomalia Quiral pelo Método de Fujikawa

1.1 A Medida Funcional Fermiônica

Na integral funcional euclidiana para férmions:

$$Z = \int \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi e^{-\int \bar{\psi} (\not{D}_E + m) \psi},$$

os campos são expandidos em autovetores do operador de Dirac euclidiano $\not{D}_E$:

$$\psi(x) = \sum_n a_n \phi_n(x), \quad \bar{\psi}(x) = \sum_n \bar{b}_n \phi_n^\dagger(x),$$

onde $\not{D}_E \phi_n = \lambda_n \phi_n$. A medida funcional é:

$$\mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi = \prod_n d\bar{b}_n da_n.$$

1.2 Transformação Quiral

Sob uma transformação quiral infinitesimal $\psi \rightarrow e^{i\alpha(x)\gamma^5}\psi$:

$$a_n \rightarrow a'_n = \sum_m C_{nm} a_m, \quad C_{nm} = \int d^4x \phi_n^\dagger(x) e^{i\alpha(x)\gamma^5} \phi_m(x).$$

A medida transforma-se como:

$$\prod_n da'_n = (\det C)^{-1} \prod_n da_n.$$

O jacobiano é:

$$\det C = \exp(-\text{Tr} \ln C) \approx \exp\left(-i \int d^4x \alpha(x) \sum_n \phi_n^\dagger \gamma^5 \phi_n\right).$$

1.3 Regularização e Resultado

A soma $\sum_n \phi_n^\dagger(x) \gamma^5 \phi_n(x)$ é formalmente $\text{tr}(\gamma^5 \delta^4(0))$ — divergente. Regularizando com o heat kernel do operador $\not{D}_E^2$:

$$\sum_n \phi_n^\dagger \gamma^5 \phi_n \rightarrow \lim_{M \rightarrow \infty} \sum_n \phi_n^\dagger \gamma^5 e^{-\lambda_n^2/M^2} \phi_n = \lim_{M \rightarrow \infty} \text{tr} \left[\gamma^5 e^{-\not{D}_E^2/M^2} \right].$$

Usando a expansão do heat kernel e as propriedades de γ^5 (apenas o termo a_2 contribui):

$$\mathcal{A}(x) = \sum_n \phi_n^\dagger \gamma^5 \phi_n = \frac{1}{16\pi^2} \text{tr}(F_{\mu\nu} \tilde{F}_{\mu\nu}) = \frac{g^2}{16\pi^2} F_{\mu\nu}^a \tilde{F}_{\mu\nu}^a$$

A anomalia quiral é portanto:

$$\partial_\mu j_5^\mu = 2im\bar{\psi}\gamma^5\psi + \frac{g^2 N_f}{16\pi^2} F_{\mu\nu}^a \tilde{F}_{\mu\nu}^a.$$

2 Teorema do Índice de Atiyah-Singer

2.1 Enunciado

Para o operador de Dirac euclidiano $\not{D}_E$ em um background de gauge com carga topológica Q :

$$\boxed{\text{ind}(\not{D}_E) = n_+ - n_- = \frac{1}{32\pi^2} \int d^4x \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} F_{\mu\nu}^a F_{\rho\sigma}^a = Q}$$

onde $n_{\pm}$ é o número de modos zero de quiralidade $\pm$ ($\gamma^5\phi_0 = \pm\phi_0$).

2.2 Relação com a Anomalia

A integral da anomalia sobre todo o espaço é exatamente a carga topológica:

$$\int d^4x \mathcal{A}(x) = \int d^4x \frac{1}{16\pi^2} F \tilde{F} = 2Q = 2(n_+ - n_-).$$

Isto conecta a anomalia (propriedade perturbativa/UV) com a topologia (propriedade não-perturbativa/global) — uma manifestação do “index theorem” que liga análise a topologia.

2.3 Demonstração via Heat Kernel

O índice pode ser computado como:

$$\text{ind}(\not{D}) = \text{Tr}(\gamma^5 e^{-t\not{D}^2}) \Big|_{t \rightarrow 0^+} = \int d^4x \text{tr}[\gamma^5 K(x, x; t)] \Big|_{t \rightarrow 0^+}.$$

Pela expansão de Seeley-DeWitt do heat kernel:

$$K(x, x; t) = \frac{1}{(4\pi t)^2} \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x) t^n.$$

Apenas a_2 contribui ao traço com γ^5 (em $d = 4$):

$$\text{tr}(\gamma^5 a_2) = \frac{1}{16\pi^2} \text{tr}(F_{\mu\nu} \tilde{F}_{\mu\nu}).$$

3 Anomalia Conforme (Trace Anomaly)

3.1 Definição

Classicamente, uma teoria sem escalas tem tensor energia-momento com traço nulo: $T^\mu_\mu = 0$. Quanticamente, a regularização introduz uma escala e:

$$\langle T^\mu_\mu \rangle = \frac{1}{(4\pi)^2} [c C^2_{\mu\nu\rho\sigma} - a E_4 + b \square R],$$

onde C^2 é o quadrado do tensor de Weyl, $E_4 = R^2 - 4R^2_{\mu\nu} + R^2_{\mu\nu\rho\sigma}$ é o integrand de Euler (Gauss-Bonnet), e a, c são as cargas centrais.

3.2 c -theorem de Zamolodchikov

Em $d = 2$, Zamolodchikov (1986) demonstrou que existe uma função $c(g)$ das constantes de acoplamento que:

1. É estacionária nos pontos fixos: $c(g^*) = c_{\text{CFT}}$ (carga central da CFT).
2. Decresce monotonicamente sob o fluxo do RG: $\dot{c} \leq 0$.
3. É igual à carga central no ponto fixo UV e IR.

Em $d = 4$, o análogo é o a -theorem (Komargodski-Schwimmer, 2011): $a_{UV} \geq a_{IR}$.

A demonstração usa crucialmente a positividade da medida euclidiana e a unitariedade (positividade de reflexão).

4 Anomalia Gravitacional

4.1 Anomalia Mista Gauge-Gravidade

Em $d = 4$ com férmions quirais acoplados a gravidade:

$$\partial_\mu j_5^\mu = \frac{1}{384\pi^2} R_{\mu\nu\rho\sigma} \tilde{R}^{\mu\nu\rho\sigma},$$

onde $\tilde{R}_{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{1}{2}\epsilon_{\rho\sigma\alpha\beta} R_{\mu\nu}^{\alpha\beta}$. Esta anomalia é essencial para o cancelamento de anomalias no Modelo Padrão e em teorias de cordas.

Parte XII

Quantização Estocástica (Parisi-Wu)

A quantização estocástica, proposta por Parisi e Wu (1981), é uma formulação alternativa da teoria quântica de campos que não requer fixação de gauge. Introduce-se um “tempo fictício” θ adicional e define-se uma dinâmica estocástica (Langevin) cujo equilíbrio reproduz a distribuição euclidiana e^{-S_E} .

1 Formulação Básica

1.1 Equação de Langevin

Para um campo escalar $\phi(x, \theta)$ dependendo das coordenadas euclidianas x e do tempo estocástico θ :

$$\boxed{\frac{\partial \phi(x, \theta)}{\partial \theta} = -\frac{\delta S_E[\phi]}{\delta \phi(x, \theta)} + \eta(x, \theta)}$$

onde η é um ruído branco gaussiano com:

$$\langle \eta(x, \theta) \rangle = 0, \quad \langle \eta(x, \theta) \eta(x', \theta') \rangle = 2\delta^4(x - x')\delta(\theta - \theta').$$

1.2 Equilíbrio e Equivalência

No limite $\theta \rightarrow \infty$, a distribuição de probabilidade de ϕ converge para a distribuição de Boltzmann euclidiana:

$$P[\phi, \theta] \xrightarrow{\theta \rightarrow \infty} P_{\text{eq}}[\phi] = \frac{1}{Z_E} e^{-S_E[\phi]}.$$

Portanto, médias sobre o ruído no equilíbrio equivalem a valores esperados euclidianos:

$$\lim_{\theta \rightarrow \infty} \langle \phi(x_1, \theta) \cdots \phi(x_n, \theta) \rangle_\eta = \langle \phi(x_1) \cdots \phi(x_n) \rangle_E.$$

1.3 Equação de Fokker-Planck

A distribuição $P[\phi, \theta]$ satisfaz a equação de Fokker-Planck funcional:

$$\frac{\partial P}{\partial \theta} = \int d^4x \frac{\delta}{\delta \phi(x)} \left[\frac{\delta S_E}{\delta \phi(x)} P + \frac{\delta P}{\delta \phi(x)} \right].$$

O estado estacionário $\partial P / \partial \theta = 0$ é $P_{\text{eq}} \propto e^{-S_E}$, verificável por substituição direta.

2 Vantagens e Aplicações

2.1 Teorias de Gauge sem Fixação de Gauge

Para campos de gauge, a equação de Langevin:

$$\frac{\partial A_\mu^a}{\partial \theta} = -\frac{\delta S_E^{YM}}{\delta A_\mu^a} + \eta_\mu^a = D_\nu F_{\nu\mu}^a + \eta_\mu^a.$$

A invariância de gauge da ação implica que a dinâmica estocástica “difunde” ao longo das órbitas de gauge sem nunca convergir nesta direção — mas correladores de quantidades invariantes de gauge atingem o equilíbrio correto **sem necessidade de fixação de gauge**.

2.2 Quantização Estocástica Complexa

Para o problema do sinal (S_E complexo, como QCD com $\mu \neq 0$), pode-se complexificar os campos e usar a equação de Langevin **complexa**:

$$\frac{\partial \phi}{\partial \theta} = -\frac{\delta S_E[\phi]}{\delta \phi} + \eta, \quad \phi \in \mathbb{C}.$$

Quando converge, reproduz os correladores corretos da teoria com ação complexa. Limitações: instabilidades numéricas e problemas de convergência (“runaways”) em certas regiões do espaço de parâmetros.

2.3 Relação com Supersimetria

A quantização estocástica possui uma **supersimetria oculta** (Parisi-Sourlas). A teoria no espaço estendido $(\phi, \eta, \text{ghost})$ com tempo θ é equivalente a uma teoria supersimétrica

com:

$$Q\phi = c, \quad Qc = 0, \quad Q\bar{c} = \lambda, \quad Q\lambda = 0,$$

onde c , $\bar{c}$ são campos ghost (Grassmann) e λ é um multiplicador. A supersimetria BRST-estocástica garante o equilíbrio correto e a independência de gauge.

Parte XIII

Teoria de Campos Topológica Euclidiana

Teorias de campos topológicas (TQFT) são teorias cujas observáveis dependem apenas da topologia do espaço-tempo subjacente, não de sua métrica. Elas são intrinsecamente euclidianas (não possuem formulação minkowskiana significativa) e conectam profundamente a física teórica à matemática pura.

1 Teoria de Chern-Simons

1.1 Ação de Chern-Simons em 3D

A ação de Chern-Simons para um campo de gauge A em uma 3-variedade M^3 é:

$$S_{CS}[A] = \frac{k}{4\pi} \int_{M^3} \text{Tr} \left(A \wedge dA + \frac{2}{3} A \wedge A \wedge A \right) = \frac{k}{4\pi} \int d^3x \epsilon^{\mu\nu\rho} \text{Tr} \left(A_\mu \partial_\nu A_\rho + \frac{2}{3} A_\mu A_\nu A_\rho \right).$$

Propriedades:

- É **métrica-independente**: não depende de $g_{\mu\nu}$.
- O “nível” $k \in \mathbb{Z}$ é quantizado (invariância sob transformações de gauge grandes).
- É topológica: $T_{\mu\nu} = 0$ (tensor energia-momento nulo).
- As equações de campo são $F = 0$ (conexões planas).

1.2 Invariantes de Nós (Witten, 1989)

Witten mostrou que o valor esperado do loop de Wilson na teoria de Chern-Simons:

$$\langle W_R(K) \rangle = \left\langle \text{Tr}_R \mathcal{P} \exp \oint_K A \right\rangle_{CS}$$

é um invariante topológico do nó K . Para $G = SU(2)$, R = fundamental, e diferentes valores de k , reproduz-se o **polinômio de Jones** e suas generalizações (polinômio HOMFLY).

2 Teoria de Yang-Mills Topologicamente Twisted (Donaldson-Witten)

2.1 Twist Topológico

Witten (1988) mostrou que a teoria de Yang-Mills $\mathcal{N} = 2$ supersimétrica em $d = 4$, após um “twist” que redefine o grupo de Lorentz euclidiano, torna-se uma TQFT. O twist identifica a simetria R da SUSY com parte do $SO(4)$:

$$SO(4)_{\text{twisted}} = \text{diag}(SU(2)_L \times SU(2)'_R) \subset SO(4) \times SU(2)_R,$$

onde $SU(2)_R$ é a simetria R de $\mathcal{N} = 2$.

2.2 Invariantes de Donaldson

Os observáveis da teoria twisted são os **invariantes de Donaldson** de 4-variedades — invariantes topológicos que distinguem variedades diferenciavelmente inequivalentes mas homeomorfas. Witten reinterpretou-os como funções de correlação da TQFT:

$$\text{Invariante de Donaldson} = \langle \mathcal{O}(x_1) \cdots \mathcal{O}(x_n) \rangle_{\text{TQFT}}.$$

A integral funcional “localiza” sobre instantons: $\langle \mathcal{O} \rangle = \int_{\mathcal{M}_{\text{inst}}} \omega$ (integral sobre o espaço de módulos de instantons).

3 Termo Topológico θ e Número de Pontryagin

3.1 O Termo θ como Invariante Topológico

O termo θ na ação de Yang-Mills:

$$S_\theta = \frac{\theta}{32\pi^2} \int d^4x F_{\mu\nu}^a \tilde{F}_{\mu\nu}^a = \theta \cdot Q,$$

é puramente topológico: $Q \in \mathbb{Z}$ (segundo número de Chern). Na ação euclidiana, contribui como um peso $e^{i\theta Q}$ na soma sobre setores topológicos:

$$Z(\theta) = \sum_{Q=-\infty}^{\infty} e^{i\theta Q} \int_{\text{setor } Q} \mathcal{D}A e^{-S_{YM}}.$$

3.2 Susceptibilidade Topológica

A susceptibilidade topológica mede flutuações da carga topológica:

$$\chi_{\text{top}} = \frac{\langle Q^2 \rangle}{V} = \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \left(-\frac{\ln Z(\theta)}{V} \right) \Big|_{\theta=0}.$$

Em QCD pura, lattice QCD dá $\chi_{\text{top}} \approx (180 \text{ MeV})^4$. A relação de Witten-Veneziano conecta χ_{top} à massa do η' :

$$m_{\eta'}^2 + m_\eta^2 - 2m_K^2 = \frac{4N_f}{f_\pi^2} \chi_{\text{top}}^{YM}.$$

4 Síntese e Perspectivas

A teoria quântica de campos euclidiana é muito mais do que uma ferramenta técnica de cálculo. Ela revela a **unidade conceitual** entre fenômenos aparentemente díspares: o tunelamento quântico em mecânica quântica e os instantons em teoria de gauge; a função de partição da mecânica estatística e a integral funcional da QFT; as transições de fase em matéria condensada e a renormalização em teoria de partículas; a termodinâmica de buracos negros e a geometria euclidiana compactificada.

A rotação de Wick, ao eliminar a natureza oscilatória da mecânica quântica e substituí-la pela supressão exponencial da termodinâmica, transforma questões de existência matemática em problemas tratáveis de teoria da probabilidade. Os axiomas de Osterwalder-Schrader garantem que nada se perde nesta passagem — a física minkowski-

ana completa pode ser reconstruída dos dados euclidianos.

Os efeitos não-perturbativos — instantons, sólitons, tunelamento, decaimento do falso vácuo — encontram sua expressão mais natural na formulação euclidiana, onde são pontos de sela reais da ação. O vácuo θ , o problema CP forte, a anomalia $U(1)_A$ via Fujikawa, a quebra de simetria quiral por instantons e a resurgência são fenômenos intrinsecamente euclidianos em sua formulação mais transparente.

A gravitação euclidiana abre uma janela para a termodinâmica quântica de buracos negros: a temperatura de Hawking emerge da periodicidade, a entropia de Bekenstein-Hawking da ação on-shell, e transições de fase gravitacionais (Hawking-Page) conectam-se via AdS/CFT ao desconfinamento em teorias de gauge. O **efeito Unruh** revela que a mesma estrutura euclidiana — regularidade no horizonte impondo periodicidade — governa a termalização percebida por observadores acelerados, unificando aceleração, gravidade e temperatura em um único framework geométrico. O **efeito Gibbons-Hawking** estende esta unificação ao horizonte cosmológico de de Sitter, e o **efeito Schwinger** de produção de pares encontra sua descrição mais transparente como instanton circular no espaço euclidiano.

A formulação na rede — impossível sem o espaço euclidiano — fornece a única abordagem *ab initio* não-perturbativa à QCD, produzindo previsões quantitativas para o espectro hadrônico, temperatura de desconfinamento e propriedades do plasma de quarks-glúons. Técnicas modernas de machine learning (normalizing flows) e métodos estocásticos (Parisi-Wu) representam novas fronteiras computacionais.

No domínio da matemática pura, a teoria de campos topológica euclidiana — de Chern-Simons aos invariantes de Donaldson — demonstra que a integral funcional euclidiana é uma fonte inesgotável de resultados matemáticos profundos, desde invariantes de nós até a classificação de 4-variedades.

É na interseção entre a elegância formal da formulação euclidiana, o poder computacional das simulações de Monte Carlo, e a profundidade conceitual das conexões com topologia, geometria e teoria da informação que reside uma das maiores conquistas intelectuais da física teórica contemporânea. A teoria quântica de campos euclidiana não é apenas uma técnica — é uma *visão de mundo*, onde espaço, tempo, matéria e probabilidade se fundem em uma única estrutura matemática coerente.

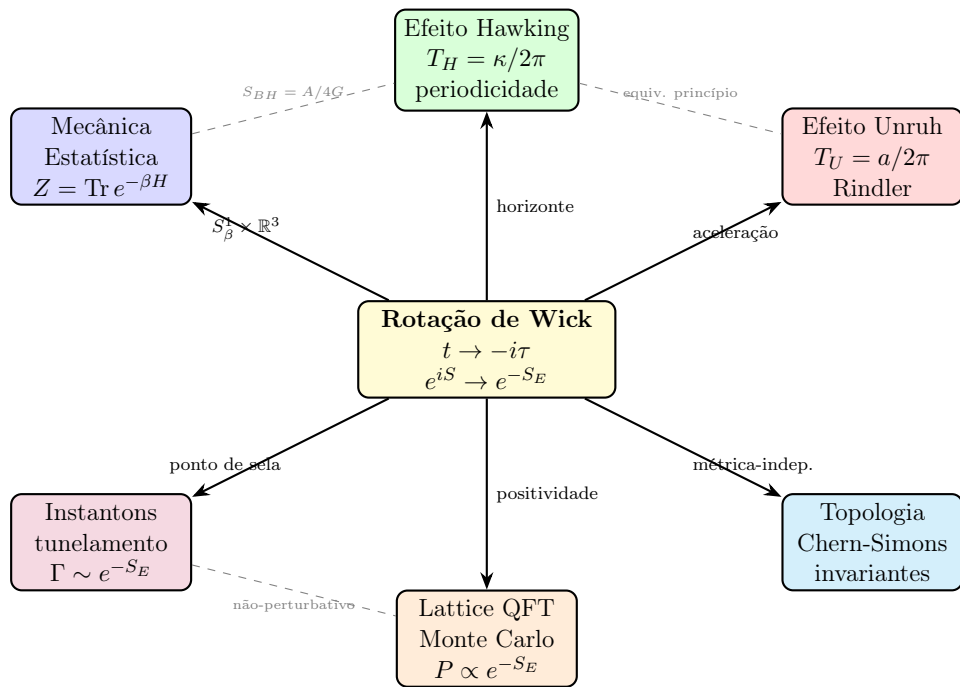


Figura 10: Mapa conceitual mostrando a rotação de Wick como princípio unificador. A substituição $t \rightarrow -i\tau$ conecta: mecânica estatística (via compactificação temporal), efeitos Hawking e Unruh (via periodicidade em horizontes), instantons e tunelamento (via pontos de sela reais), simulações na rede (via positividade da medida), e teoria topológica (via independência da métrica).